Concursul regional "PRIN LABIRINTUL MATEMATICII"
ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024

BAREM DE CORECTARE CLASA A VIII-A

Subiectul 1. Fie numerele naturale p și n, cu $2 \leq p < n$, care fac parte din secvența

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots, p, n, p+n, 2n+p,$$

în care fiecare număr, începând de la al treilea până la ultimul, este suma celor două numere anterioare lui. Fie

$$A = \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 5} + \frac{5}{3\cdot 8} + \frac{8}{5\cdot 13} + \cdots + \frac{n}{p\cdot(n+p)} + \frac{n+p}{n\cdot(2n+p)}$$

și

$$B = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{3\cdot 8} + \frac{1}{5\cdot 13} + \cdots + \frac{1}{p\cdot(n+p)} + \frac{1}{n\cdot(2n+p)}.$$

a) Arătați că $A > 1$.
b) Demonstrați că $A \cdot B < 1$.

Soluție:

a) $A \geq \frac{2}{1\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 5} + \frac{5}{3\cdot 8} = \frac{47}{40} > 1$ .... 1 p

b) $A = \frac{3-1}{1\cdot 3} + \frac{5-2}{2\cdot 5} + \frac{8-3}{3\cdot 8} + \frac{13-5}{5\cdot 13} + \cdots + \frac{(n+p)-p}{p\cdot(n+p)} + \frac{(2n+p)-n}{n\cdot(2n+p)}$

$A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{13} + \cdots + \frac{1}{p} - \frac{1}{n+p} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2n+p} \Leftrightarrow A = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+p} - \frac{1}{2n+p}$ .... 2 p

$B = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{5}{3\cdot 5\cdot 8} + \frac{8}{5\cdot 8\cdot 13} + \cdots + \frac{n}{p\cdot n\cdot(n+p)} + \frac{n+p}{n\cdot(n+p)\cdot(2n+p)}$

$B = \frac{3-1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{5-2}{2\cdot 3\cdot 5} + \frac{8-3}{3\cdot 5\cdot 8} + \frac{13-5}{5\cdot 8\cdot 13} + \cdots + \frac{(n+p)-p}{p\cdot n\cdot(n+p)} + \frac{(2n+p)-n}{n\cdot(n+p)\cdot(2n+p)}$ .... 1 p

$B = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3} - \frac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \frac{1}{n\cdot p} - \frac{1}{n\cdot(n+p)} + \frac{1}{n\cdot(n+p)} - \frac{1}{(n+p)\cdot(2n+p)}$ .... 1 p

$B = \frac{1}{1\cdot 2} - \frac{1}{(n+p)\cdot(2n+p)}$ .... 1 p

$A + B = 2 - \frac{1}{n+p} - \frac{1}{2n+p} - \frac{1}{(n+p)\cdot(2n+p)} < 2$ .... 0,5 p

$\sqrt{A\cdot B} \leq \frac{A+B}{2} < \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow A\cdot B < 1$ .... 0,5 p

Subiectul 2. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația

$$3x^2 - 6x + 4 = 6\{x\}([x] - \{x\}),$$

unde prin $[a]$ și $\{a\}$ s-a notat partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real a.

(*Gazeta Matematică nr. 5/2024*)

Soluție: Se știe că $x = [x] + \{x\}, \forall\, x \in \mathbb{R}$. .... 1 p

Pentru simplificarea scrierii, notăm $[x] = a \in \mathbb{Z}, \{x\} = b \in [0,1)$.

Deci $x = a + b$. Înlocuim în ecuație și obținem

$3(a+b)^2 - 6(a+b) + 4 = 6b(a-b) \Leftrightarrow 3a^2 + 6ab + 3b^2 - 6a - 6b + 4 - 6ab + 6b^2 = 0$ .... 2 p

$\Leftrightarrow 3a^2 + 9b^2 - 6a - 6b + 4 = 0$ .... 1 p

$\Leftrightarrow 3(a-1)^2 + (3b-1)^2 = 0 \Rightarrow a = 1 \in \mathbb{Z},\ b = \frac{1}{3} \in [0,1)$ .... 2 p

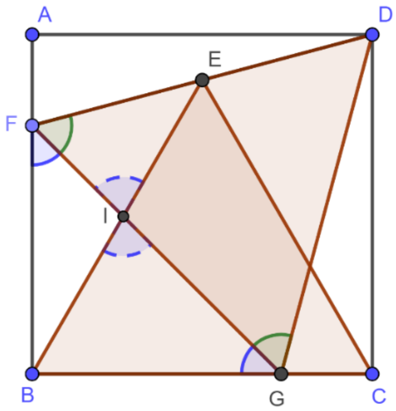
Deci $x = 1 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$ .... 1 p

Subiectul 3. Fie $ABCD$ un pătrat și E un punct în interiorul său, astfel încât triunghiul BEC este echilateral. Fie $\{F\} = AB \cap DE$ și $G \in (BC)$ astfel încât ΔDFG echilateral. Calculați raportul razelor cercurilor înscrise în triunghiurile ΔFIE și ΔBIG, unde $FG \cap BE = \{I\}$.

Bogdan Ionuți

Soluție:

Se obține $m(\sphericalangle ADF) = 15^\circ \Rightarrow m(\sphericalangle AFD) = 75^\circ$..1 p



Cum ΔDFG echilateral $\Rightarrow m(\sphericalangle DFG) = 60^\circ$, dar $m(\sphericalangle AFB) = 180^\circ$ $(A, F, B$ coliniare), deci:

$m(\sphericalangle BFG) = 45^\circ$ cu $m(\sphericalangle FBG) = 90^\circ$

rezultă că triunghiul ΔBFG dreptunghic isoscel...2 p

Notăm cateta ΔBFG cu $x = BG$, rezultă $FG = x\sqrt{2}$.

$$\left.\begin{array}{r} m(\sphericalangle BIG) = m(\sphericalangle FIE)\ (opuse\ la\ vârf) \\ m(\sphericalangle EFI) = m(\sphericalangle IBG) = 60^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta FIE \sim \Delta BIG \text{........................1 p}$$

$E \in$ mediatoarei segmentului $AD \Rightarrow E$ mijlocul $DF \Rightarrow GE$ mediana în ΔGDF, rezultă:

$$FE = \frac{FG}{2} = \frac{x\sqrt{2}}{2} \text{ ....1 p}$$

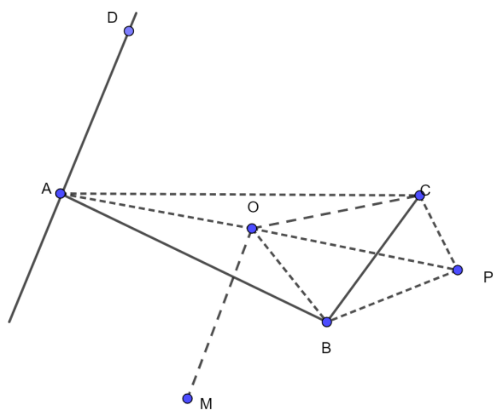
Notăm r raza cercului înscris în ΔFIE și R raza cercului înscris în ΔBIG.

Din asemănarea triunghiurilor rezultă că:

$$\frac{r}{R} = \frac{FE}{BG} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{2}}{x} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ....2 p}$$

Subiectul 4. Fie punctele necoplanare A, B, C, D și M astfel încât ΔABC este un triunghi echilateral, $AD \parallel MO$, $AO = OM$ și $BM = OC$, unde punctul O este situat în interiorul ΔABC. Știind că $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ$ și $m(\sphericalangle AOC) = 120^\circ$, determinați măsura unghiului dintre dreptele AD și BO.

Soluție:



Din $AD \parallel MO$, rezultă $\sphericalangle(AD, BO) = \sphericalangle(MO, BO) = \sphericalangle MOB$ ....1 p

Construim ΔPCB congruent cu ΔOAB, punctul P în exteriorul ΔABC, $P \in (ABC)$ ....1 p

Deoarece $m(\sphericalangle OBP) = 60^\circ$ și ΔOBP isoscel $\Rightarrow \Delta OBP$ echilateral $\Rightarrow$ $OP = OB$ ....1 p

$m(\sphericalangle AOB) = 360^\circ - (90^\circ + 120^\circ) = 150^\circ$, $m(\sphericalangle BPC) = 150$ ...1 p

Deci: $m(\sphericalangle CPO) = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$ ....1 p

$AO = OM = PC$, $OB = OP$, $MB = OC$, deci $\Delta MOB \equiv \Delta CPO$.......1 p

Rezultă $m(\sphericalangle CPO) = m(\sphericalangle MOB) = 90^\circ$. ....1 p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro