Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024

BAREM DE CORECTARE, CLASA a IX-a

Subiectul 1. Rezolvați, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\{x\}([x]+\{x+1\})=[x+1]$, unde $\{a\}$ și $[a]$ reprezintă partea fracționară, respectiv partea întreagă, a numărului real a.

Gazeta Matematică nr. 5/2024

Soluție:

Pentru orice număr real $x\in\mathbb{R}$ au loc egalitățile $[x+1]=[x]+1$ și $\{x+1\}=\{x\}$ 2p

Ecuația devine $\{x\}[x]+\{x\}^2=[x]+1$ 2p

deci $(\{x\}-1)(x+1)=0$ 2p

cum $\{x\}\neq 1$, rezultă $x=-1$ 1p

Subiectul 2. Determinați numerele reale a,b, $0<b\le a$, astfel încât ecuația $x^2+ax-2b=0$ să admită ambele rădăcini numere întregi.

Soluție:

Fie $x_1,x_2\in\mathbb{Z}$ rădăcinile ecuației. Din relațiile lui Viette avem $x_1+x_2=-a\in\mathbb{Z}$ și $x_1x_2=-2b\in\mathbb{Z}$ 1p

$\Delta=a^2+8b$ trebuie să fie pătrat perfect, $b>0\Rightarrow \Delta=a^2+8b>a^2$ și $\Delta=a^2+8b\le a^2+8a<(a+4)^2$

.... 2p

$a^2<\Delta<(a+4)^2$, Δ pătrat perfect $\Rightarrow \Delta\in\left\{(a+1)^2,(a+2)^2,(a+3)^2\right\}$. 1p

Dacă $\Delta=(a+1)^2\Rightarrow a^2+8b=a^2+2a+1\Rightarrow 2b=\dfrac{2a+1}{4}\notin\mathbb{Z}$.

Dacă $\Delta=(a+3)^2\Rightarrow a^2+8b=a^2+6a+9\Rightarrow 2b=\dfrac{6a+9}{4}\notin\mathbb{Z}$. 1p

Dacă $\Delta=(a+2)^2\Rightarrow a^2+8b=a^2+4a+4\Rightarrow 2b=a+1$, soluțiile ecuației sunt $x_1=1,x_2=-a-1\in\mathbb{Z}$,

deci $a=k,b=\dfrac{k+1}{2},k\in\mathbb{Z}$. 2p

Subiectul 3.

a) Arătați că $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, pentru orice numere reale a,b,c.

b) Fie numerele reale strict pozitive $x,y,z>0$, cu $\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1$. Determinați valoarea minimă a expresiei

$$E(x,y,z)=\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}.$$

Soluție:

a) Inegalitatea este echivalentă cu $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$. 2p

b) $\dfrac{x^2}{x+y}=\dfrac{x^2+xy-xy}{x+y}=x-\dfrac{xy}{x+y}\geq x-\dfrac{xy}{2\sqrt{xy}}=x-\dfrac{\sqrt{xy}}{2}$ și anoloagele. 2p

$$E(x,y,z)\geq x+y+z-\frac{1}{2}\left(\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}\right)=x+y+z-\frac{1}{2}.$$ 1p

Din a) $\Rightarrow x+y+z\geq\sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx}=1\Rightarrow E(x,y,z)\geq\dfrac{1}{2}$ 1p

cu egalitate pentru $x=y=z=\dfrac{1}{3}$. 1p

Subiectul 4.

a) Demonstrați că există o infinitate de numere raționale x astfel încât $\sqrt{x+2024}$ și $\sqrt{x+2025}$ să fie numere raționale.

b) Demonstrați că există o infinitate de numere raționale x astfel încât $\sqrt{x+2024}$ și $\sqrt{x+2025}$ să fie numere iraționale.

Soluție: a) $\sqrt{x+2024}=a\in\mathbb{Q}_+,\sqrt{x+2025}=b\in\mathbb{Q}_+\Rightarrow a^2=x+2024,b^2=x+2025,b^2-a^2=1$. 2p

$b-a<b+a$, alegem $b-a=\dfrac{m}{n},b+a=\dfrac{n}{m},m,n\in\mathbb{N}^*,m<n$. 1p

$b=\dfrac{m^2+n^2}{2mn},a=\dfrac{n^2-m^2}{2mn},x=a^2-2024=\left(\dfrac{n^2-m^2}{2mn}\right)^2-2024$. 2p

b) Pentru $x=10^n+3,n\in\mathbb{N}^*$, avem $U(x+2024)=7,U(x+2025)=8\Rightarrow x+2024,x+2025$ nu sunt pătrate perfecte $\Rightarrow\sqrt{x+2024},\sqrt{x+2025}$ sunt iraționale 2p

Baia Mare, str. Culturii, nr. 2, cod poştal 430282
Telefon şi fax: 0262211943, mobil secretariat: 0730123630
Cod fiscal 3825932, e-mail: lucaciu@lucaciu.multinet.ro