Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediţia a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024

BAREM DE CORECTARE, CLASA A X-A

Subiectul 1.
Numerele reale x și y verifică relația $x-\sqrt{x+2}=\sqrt{y+3}-y$. Determinați $\min(x+y)$ și $\max(x+y)$.
Soluție:
Fie $S=x+y$. Avem $x+y=\sqrt{x+2}+\sqrt{y+3}$, de unde $S^2=S+5+2\sqrt{(x+2)(y+3)}$
$\Rightarrow S^2-S-5\geq 0$, cu $S\geq 0$, de unde

$$S\geq\frac{1+\sqrt{21}}{2}. \qquad (3p)$$

Obținem

$$\min(x+y)=\frac{1+\sqrt{21}}{2},$$

care se atinge pentru

$$x=-2, y=\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

sau pentru

$$x=\frac{7+\sqrt{21}}{2}, y=-3 \quad \left(adică\ \sqrt{(x+2)(y+3)}=0\right) \qquad (0.5p)$$

Pe de altă parte, $2\sqrt{(x+2)(y+3)}\leq(x+2)+(y+3)=S+5$, deci $S^2-2S-10\leq 0$
Obținem

$$\max(x+y)=1+\sqrt{11}, \qquad (3p)$$

care se atinge dacă $x+2=y+3$ și $x+y=1+\sqrt{11}$, adică pentru

$$x=1+\frac{\sqrt{11}}{2}\text{ și } y=\frac{\sqrt{11}}{2}. \qquad (0.5p)$$

Subiectul 2. Determinați funcția bijectivă $f:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$, cu proprietatea că

$$|f(x)-f(y)|\leq|x-y|, \forall x,y\in\mathbb{N}.$$

Mihai Zelina

Soluție:
Din relație rezultă:

$$|f(x+1)-f(x)|\leq 1\Rightarrow\left.\begin{matrix}f(x+1)-f(x)\in\{-1,0,1\}\\ f\ bijectivă\ \Rightarrow f\ injectivă\end{matrix}\right\}\Rightarrow f(x+1)-f(x)\in\{-1,1\},\forall x\in\mathbb{N}\quad (*)\quad (2p)$$

f bijectivă $\Rightarrow f$ surjectivă și fie $k\in\mathbb{N}$ cu $f(k)=0$
Prin urmare, din relația (*), rezultă:

$$f(k+1)-f(k)\in\{-1,1\}\Rightarrow f(k+1)=\pm 1\Rightarrow f(k+1)=1. \qquad (2p)$$

Dacă $k\geq 1\overset{(*)}{\Rightarrow}f(k)-f(k-1)=\pm 1\Rightarrow f(k-1)=1$ și f nu mai este injectivă.
Deci, $k\geq 1$ este imposibil și atunci $k=0\Rightarrow f(0)=0$. $(1p)$
Din (*), avem că:

$$f(1)-f(0)=\pm 1\Rightarrow f(1)=1$$

$$f(2) - f(1) = \pm 1 \Rightarrow f(2) \in \{0, 2\} \overset{f\ inj}{\Longrightarrow} f(2) = 2$$

Inductiv, reiese că $f(n) = n, \forall n \in \mathbb{N}$. $(2p)$

Subiectul 3. Fie numerele reale, $a, b, c \in (0, \infty)$ astfel încât $a + b + c = 3$. Arătați că:

$$\frac{a^3}{a^2+b} + \frac{b^3}{b^2+c} + \frac{c^3}{c^2+a} \geq \frac{3}{2}.$$

(*Gazeta Matematică nr.5/2024*)

Soluție:

$$\frac{a^3}{a^2+b} = \frac{a(a^2+b) - ab}{a^2+b} = a - \frac{ab}{a^2+b} \Rightarrow$$

$$\frac{a^3}{a^2+b} + \frac{b^3}{b^2+c} + \frac{c^3}{c^2+a} = a + b + c - \frac{ab}{a^2+b} - \frac{bc}{b^2+c} - \frac{ca}{c^2+a} =$$

$$= 3 - \frac{ab}{a^2+b} - \frac{bc}{b^2+c} - \frac{ca}{c^2+a} \quad (3p)$$

Rămâne de arătat:

$$3 - \frac{ab}{a^2+b} - \frac{bc}{b^2+c} - \frac{ca}{c^2+a} \geq \frac{3}{2} \quad (1p)$$

Avem

$$\frac{ab}{a^2+b} + \frac{bc}{b^2+c} + \frac{ca}{c^2+a} \leq \frac{ab}{2a\sqrt{b}} + \frac{bc}{2b\sqrt{c}} + \frac{ca}{2c\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{a}}{2} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq 3 \Leftrightarrow \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}\right)^2 \leq 9 = 3(a+b+c) \text{ "A"} \quad (3p)$$

Subiectul 4. Demonstrați că $\left[\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1}\right] = \left[\sqrt[3]{8n+3}\right]$, pentru orice număr natural n.

Soluție:

Pentru $n = 0$ părțile întregi sunt egale cu 1 $(0{,}5p)$

Presupunem $n \geq 1$. Din inegalitatea mediilor avem:

$$\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} > 2\sqrt[6]{n(n+1)} = \sqrt[6]{64n^2 + 64n} > \sqrt[6]{64n^2 + 48n + 9} = \sqrt[6]{(8n+3)^2},$$

Deci $\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} > \sqrt[3]{8n+3}$ (1) $(1{,}5p)$

Cum funcția $f: (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sqrt[3]{x}$ este strict concavă, rezultă:

$$f\left(\frac{n + (n+1)}{2}\right) > \frac{f(n) + f(n+1)}{2},$$

De unde $\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1} < \sqrt[3]{8n+4}$ (2) $(2p)$

Din (1) și (2) rezultă: $\left[\sqrt[3]{8n+3}\right] \leq \left[\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1}\right] \leq \left[\sqrt[3]{8n+4}\right]$ $(1p)$

Vom arata că $\left[\sqrt[3]{8n+3}\right] = \left[\sqrt[3]{8n+4}\right]$ $(*)$

Presupunând contrariul, notând $\left[\sqrt[3]{8n+3}\right] = k \Rightarrow \left[\sqrt[3]{8n+4}\right] \geq k+1$ $\left(din\ (*)\right)$ $(1p)$

Atunci $8n + 3 < (k+1)^3$ și $(8n+4) \geq (k+1)^3$, deci $8n + 4 = (k+1)^3$, absurd, deoarece $8n + 4$ nu este cub perfect, fiind multiplu de 2, dar nu și de 2^3.

În concluzie, $\left[\sqrt[3]{8n+3}\right] = \left[\sqrt[3]{n} + \sqrt[3]{n+1}\right]$, pentru $\forall n \in \mathbb{N}$. $(1p)$