Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediția a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024
BAREM DE CORECTARE, CLASA A XI-A

Subiectul 1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ pentru care există $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, astfel încât $A^k \neq \lambda \cdot I_2$, oricare ar fi $\lambda \in \mathbb{C}$, iar matricea A^k are elementul de pe poziția $(1, 2)$ egal cu zero. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, matricea A^n are elementul de pe poziția $(1, 2)$ egal cu zero.

Supliment Gazeta Matematică nr. 4/2024

Soluție: Pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, notăm $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. Din ipoteză, avem $A^k = \begin{pmatrix} a_k & 0 \\ c_k & d_k \end{pmatrix}$, deci $b_k = 0$.

În plus, $c_k \neq 0$ sau $a_k \neq d_k$ **1p**

$A^k \cdot A^n = A^n \cdot A^k \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_k a_n & a_k b_n \\ c_k a_n + d_k c_n & c_k b_n + d_k d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n a_k + b_n c_k & b_n d_k \\ c_n a_k + d_n c_k & d_k d_n \end{pmatrix}$ (1), de unde obținem $b_n c_k = 0$ (2)

și $a_k b_n = b_n d_k$ (3) **3p**

I Dacă $c_k \neq 0$, din (2) obținem $b_n = 0$. **1p**

II Dacă $c_k = 0$, deoarece $a_k \neq d_k$, din (3) obținem $b_n = 0$. **1p**

Din **I** și **II** rezultă că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} a_n & 0 \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$. **1p**

Subiectul 2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$. Determinați permutările $\sigma \in S_n$ astfel încât pentru orice $k = \overline{2, n-1}$ are loc egalitatea: $\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\sigma(i) \cdot \sigma(\sigma(i))} = \frac{k-1}{2(k+1)}$.

Dana Heuberger

Soluție: Pentru $k = 2$, obținem $\sigma(1) \cdot \sigma(\sigma(1)) = 6$, deci $\begin{cases} \sigma(1) = 2 \\ \sigma(2) = 3 \end{cases}$, sau $\begin{cases} \sigma(1) = 3 \\ \sigma(3) = 2 \end{cases}$, sau $\begin{cases} \sigma(1) = 6 \\ \sigma(6) = 1 \end{cases}$. **1p**

Fie $k = \overline{2, n-2}$. Cum $k + 1 \leq n - 1$, avem $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{\sigma(i) \cdot \sigma(\sigma(i))} = \frac{k}{2(k+2)}$. Scăzând egalitatea din enunț din egalitatea precedentă, obținem $\frac{1}{\sigma(k) \cdot \sigma(\sigma(k))} = \frac{k}{2(k+2)} - \frac{k-1}{2(k+1)} = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Așadar $\sigma(k) \cdot \sigma(\sigma(k)) = (k+1)(k+2)$, pentru orice $k = \overline{2, n-2}$. (1) **1p**

i) Dacă $\sigma(1) = 2$ și $\sigma(2) = 3$, folosind (1), deducem prin inducție că $\sigma(t) = t + 1$, $\forall\, t = \overline{1, n-1}$.

Deoarece $1 \in \operatorname{Im} \sigma$, rezultă că $\sigma(n) = 1$, deci $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \ldots & n & 1 \end{pmatrix}$. **1p**

ii) Dacă $\sigma(1)=3$ și $\sigma(3)=2$, pentru $k=3$ în (1), avem $2\cdot\sigma(2)=\sigma(3)\cdot\sigma(\sigma(3))=20$, deci $\sigma(2)=10$.
Pentru $k=2$ în (1), avem $10\cdot\sigma(10)=\sigma(2)\cdot\sigma(\sigma(2))=12$, deci $\sigma(10)=1{,}2\notin\mathbb{N}$, fals. **1p**

iii) Dacă $\sigma(1)=6$ și $\sigma(6)=1$, atunci $n\geq 6$, deci $n-2\geq 4$, așadar îi putem da lui k valorile 2, 3, 4 în (1).
Pentru $k=2$ în (1), avem $\sigma(2)\cdot\sigma(\sigma(2))=12$, (2) deci $12\,|\,\sigma(2)$, așadar $\sigma(2)\in\{2,3,4,12\}$.
Dacă $\sigma(2)=2$, din (2) obținem $2\cdot\sigma(2)=12$, deci $\sigma(2)=6$, fals.
Dacă $\sigma(2)=12$, din (2) obținem $12\cdot\sigma(12)=12$, deci $\sigma(12)=1$, fals. **1p**

Dacă $\sigma(2)=3$, din (2) obținem $3\cdot\sigma(3)=12$, deci $\sigma(3)=4$. Pentru $k=3$ în (1), avem $\sigma(3)\cdot\sigma(\sigma(3))=20$ deci $4\cdot\sigma(4)=20$, adică $\sigma(4)=5$. Pentru $k=4$ în (1), avem $\sigma(4)\cdot\sigma(\sigma(4))=30$ deci $5\cdot\sigma(5)=30$, adică $\sigma(5)=6$, fals. **1p**
Dacă $\sigma(2)=4$, din (2) obținem $4\cdot\sigma(4)=12$, deci $\sigma(4)=3$. Pentru $k=4$ în (1), avem $\sigma(4)\cdot\sigma(\sigma(4))=30$ deci $3\cdot\sigma(3)=30$, adică $\sigma(3)=10$. Prin urmare, $n\geq 10$, deci $n-2\geq 8$, așadar putem înlocui $k=6$ în (1) și obținem $6=1\cdot\sigma(1)=\sigma(6)\cdot\sigma(\sigma(6))=56$, fals.

Din **i), ii)** și **iii)** deducem că singura soluție este $\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \dots & n-1 & n\\ 2 & 3 & \dots & n & 1\end{pmatrix}$. **1p**

Subiectul 3. Fie șirul de numere reale $(x_n)_{n\geq 1}$, astfel încât $(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}+x_n+2024)\leq 0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.
a) Dați un exemplu de șir care verifică inegalitatea din enunț și nu este monoton.
b) Demonstrați că șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit.

Soluție: a) $x_{2k}=1$ și $x_{2k-1}=-2025$, pentru orice $k\in\mathbb{N}^*$. **2p**
b) Inegalitatea din enunț se rescrie: $x_{n+1}^2+2024x_{n+1}\leq x_n^2+2024x_n \quad (1)$ **1p**
Metoda I: $(1)\Leftrightarrow x_{n+1}^2+2\cdot 1012x_{n+1}+1012^2\leq x_n^2+2\cdot 1012x_n+1012^2\Leftrightarrow (x_{n+1}+1012)^2\leq(x_n+1012)^2$ ……... **1p**
Deoarece $|x_{n+1}+1012|\leq|x_n+1012|$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, rezultă că șirul $(|x_n+1012|)_{n\geq 1}$ este descrescător. ....…….. **1p**
Așadar, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, $|x_n+1012|\leq|x_1+1012|$, deci $x_n\in\left[-1012-|x_1+1012|,-1012+|x_1+1012|\right]$, adică șirul este mărginit. **2p**
Metoda a II-a: Fie $(y_n)_{n\geq 1}$, $y_n=x_n^2+2024x_n$. Din (1) obținem că $y_{n+1}\leq y_n$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este descrescător, și $y_n\leq y_1$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ **1p**
$y_n=x_n^2+2024x_n\geq -1012^2$, deci $y_n\in\left[-1012^2,y_1\right]$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, așadar șirul $(y_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. ………. **1p**
Ecuația $x_n^2+2024x_n-y_n=0$ are $\Delta=2024^2+4y_n\geq 0$, deci $x_n=\dfrac{-2024\pm\sqrt{2024^2+4y_n}}{2}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ ……... **1p**
$|x_n|\leq 1012+\sqrt{1012^2+y_n}\leq 1012+\sqrt{1012^2+y_1}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$, deci șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ este mărginit. ……….…..…….. **2p**

Observație: Orice alt exemplu corect dat la punctul **a)** se notează cu 2 puncte.

Subiectul 4. Fie $(a_n)_{n\geq 1}$ un şir strict descrescător, cu $a_1=1$, astfel încât pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-1}-a_{2n}=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n}.$$

a) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, $a_n>\frac{1}{2^n}$.

b) Demonstrați că şirul $\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)_{n\geq 1}$ este nemărginit.

c) Determinați termenul general al şirului $(a_n)_{n\geq 1}$, ştiind că $\frac{1}{a_n}\in\mathbb{N}^*$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$.

Cristian Heuberger

a) Pentru $n=1$, relația de recurență devine $a_1-a_2=a_2$ și de aici $a_2=\frac{1}{2}\cdot a_1$. $(*)$

Dacă $n\geq 2$, avem: $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-3}-a_{2n-2}+a_{2n-1}-a_{2n}=a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{2n-2}+a_{2n-1}+a_{2n}$, (1)

respectiv $a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+a_{2n-3}-a_{2n-2}=a_n+a_{n+1}+\ldots+a_{2n-2}$. (2)

Scăzând din (1) egalitatea (2), obținem $\cancel{a}_{2n-1}-a_{2n}=-a_n+\cancel{a}_{2n-1}+a_{2n}$. Așadar $a_{2n}=\frac{1}{2}\cdot a_n,\ \forall n\geq 2$.

Folosind $(*)$, deducem că $a_{2n}=\frac{1}{2}\cdot a_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$. **1p**

Pentru $n\in\mathbb{N}^*$, obținem inductiv: $a_{2^n}=\frac{1}{2^n}\cdot a_1=\frac{1}{2^n}$. (3) **1p**

Dar $n<2^n$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$. Cum șirul este strict descrescător, rezultă că $a_n>a_{2^n}=\frac{1}{2^n}$, $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ **1p**

b) Fie $x_n=\sum_{k=1}^{n}a_k$, $n\in\mathbb{N}^*$. Pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$, avem

$$x_{2^n}=a_1+a_2+(a_3+a_4)+(a_5+a_6+a_7+a_8)+\ldots+\left(a_{2^{n-1}+1}+a_{2^{n-1}+2}+\ldots+a_{2^n}\right)\geq$$

$$\geq a_1+a_2+2\cdot a_4+4\cdot a_8+\ldots+2^{n-1}\cdot a_{2^n}=1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=1+\frac{n}{2}.\ (4)$$ **1p**

Din (4) deducem că șirul $\left(x_{2^n}\right)_{n\geq1}$ este nemărginit superior, deci $(x_n)_{n\geq1}$ este nemărginit **1p**

c) Demonstrăm că $a_n=\frac{1}{n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. Avem $a_1=1=\frac{1}{1}$ și $a_2=\frac{1}{2}\cdot a_1=\frac{1}{2}$.

Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$ și $k\in\mathbb{N}^*$, astfel încât $2^k\leq n<2^{k+1}$. Așadar $n=2^k+r$, cu $r\in\{0,1,\ldots,2^k-1\}$.

Deoarece șirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător, pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, cu $2^k\leq m<2^{k+1}$, avem $a_{2^k}\geq a_m>a_{2^{k+1}}$.

Utilizând (3), obținem $\frac{1}{2^k}\geq a_m>\frac{1}{2^{k+1}}$, deci $2^k\leq\frac{1}{a_m}<2^{k+1}$.

Folosind din nou monotonia șirului $(a_n)_{n\geq 1}$, rezultă că $2^k\leq\frac{1}{a_{2^k}}<\frac{1}{a_{2^k+1}}<\ldots<\frac{1}{a_{2^{k+1}-1}}<2^{k+1}$. **1p**

Cum intervalul $\left[2^k,2^{k+1}\right)$ conține exact 2^k numere naturale, iar numerele $\frac{1}{a_{2^k}},\frac{1}{a_{2^k+1}},\ldots,\frac{1}{a_{2^{k+1}-1}}$ sunt naturale, deducem că $\frac{1}{a_m}=m$, pentru orice $m\in\mathbb{N}^*$, cu $2^k\leq m<2^{k+1}$. Așadar $a_n=\frac{1}{n}$, pentru orice $n\in\mathbb{N}^*$. **1p**