Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”
ediţia a XVII-a, Baia Mare, 9 noiembrie 2024
BAREM DE CORECTARE, CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie „$*$” o lege de compoziție asociativă și comutativă definită pe o mulțime nevidă *S*, care are proprietatea că , pentru orice $x, y \in S$, există $z \in S$ astfel încât $x * z = y$.

Arătați că dacă $a, b, c \in S$ și $a * c = b * c$, atunci $a = b$.

Soluție: Fie $a \in S \Rightarrow \exists e_a \in S$, astfel încât $a * e_a = a$. 1p

Pentru orice $x \in S$ avem $(a * e_a) * x = a * x$, deci din proprietatea de asociativitate și ce de comutativitate rezultă $(a * x) * e_a = a * x$, oricare ar fi $x \in S$. 1p

Pentru orice $y \in S$, $\exists z \in S$ astfel încât $a * z = y$, deci $y * e_a = y, \forall y \in S$. 2p

Fie $c \in S$, oarecare. Atunci $\exists z_c \in S$ pentru care $c * z_c = e_a$. 1p

Egalitatea $a * c = b * c$ implică $a * c * z_c = b * c * z_c$, deci $a * e_a = b * e_a$ ceea ce implică $a = b$. 2p

Subiectul 2. Fie $H \subset \mathbb{R}$ o mulțime cu cel puțin două elemente, pe care definim legea de compoziție internă „$\circ$” cu proprietatea că $x < x \circ y < y$ pentru orice $x, y \in H$ astfel încât $x < y$.

a) Arătați că „$\circ$” nu admite element neutru și că nu este asociativă.
b) Dați exemplu de o mulțime *H* și o operație „$\circ$”, care să fie comutativă.
c) Dați exemplu de o mulțime *H* și o operație „$\circ$”, care să fie necomutativă.

(*Gazeta Matematică nr. 9/2024*)

Soluție

a) Presupunem că „$\circ$” admite elementul neutru $e \in H$, deci

există cel puțin un element $x \in H, x \neq e$ pentru care $x \circ e = e \circ x = x$ 1p

Dacă $x < e \Rightarrow x < x \circ e < e \Rightarrow x < x < e$, fals.

Dacă $e < x \Rightarrow e < e \circ x < x \Rightarrow e < x < x$, fals.

Deci legea „$\circ$” nu admite element neutru. 1p

Notăm $\underbrace{x \circ x \circ \ldots \circ x}_{n \text{ ori}} = x^{(n)}, n \in \mathbb{N}^*$.

Dacă $x < x \circ x \Leftrightarrow x < x^{(2)}$, atunci $x < x^{(3)} < x^{(2)} \Rightarrow x < x^{(4)} < x^{(3)} < x^{(5)} < x^{(2)}$

$\Rightarrow x < x^{(5)} < x^{(4)} < x^{(7)} < x^{(3)} < x^{(8)} < x^{(5)} < x^{(7)} < x^{(2)}$, fals. 1p

Dacă $x \circ x < x \Leftrightarrow x^{(2)} < x$, atunci $x^{(2)} < x^{(3)} < x \Rightarrow x^{(2)} < x^{(5)} < x^{(3)} < x^{(4)} < x$

$\Rightarrow x^{(2)} < x^{(7)} < x^{(5)} < x^{(8)} < x^{(3)} < x^{(7)} < x^{(4)} < x^{(5)} < x$, fals. 1p

Deci $x \circ x = x, \forall x \in H$.

Presupunem că „$\circ$” este asociativă.

Fie $x < y \Rightarrow x < x \circ y < y \Rightarrow x < x \circ (x \circ y) < x \circ y < y \Rightarrow x < (x \circ x) \circ y < x \circ y < y \Rightarrow x < x \circ y < x \circ y < y$, fals. Deci legea „$\circ$” nu este asociativă. 1p

b) $x \circ y = \dfrac{x+y}{2}, H = \mathbb{R}$ 1p

c) $x \circ y = \dfrac{x+2y}{3}, H = \mathbb{R}$ 1p

Subiectul 3. Fie $f, F : (-1,1) \to \mathbb{R}$, unde F este o primitivă pe $(-1,1)$ a funcției f. Determinați funcția F pentru care egalitatea

$$F(x) + \left(x^2+1\right) f(x) = \left(x^2+1\right) e^{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}$$

are loc, oricare ar fi $x \in (-1,1)$.

Soluție: $F(x) + \left(x^2+1\right) f(x) = \left(x^2+1\right) e^{\arcsin x - \operatorname{arctg} x} \Rightarrow e^{\operatorname{arctg} x} \cdot \dfrac{1}{x^2+1} F(x) + e^{\operatorname{arctg} x} \cdot F'(x) = e^{\arcsin x}$

$\Rightarrow \left(e^{\operatorname{arctg} x} \cdot F(x)\right)' = e^{\arcsin x} \Rightarrow e^{\operatorname{arctg} x} \cdot F(x) \in \int e^{\arcsin x} dx$ 3p

$\int e^{\arcsin x} dx = x \cdot \arcsin x - \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} e^{\arcsin x} dx = x \cdot \arcsin x + \int \left(\sqrt{1-x^2}\right)' e^{\arcsin x} dx =$

$= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} e^{\arcsin x} - \int e^{\arcsin x} dx \Rightarrow \int e^{\arcsin x} dx = \dfrac{1}{2} e^{\arcsin x} \left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + C$ 3p

Avem $e^{\operatorname{arctg} x} \cdot F(x) = \dfrac{1}{2} e^{\arcsin x} \left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + c, c \in \mathbb{R}$

deci $F(x) = \dfrac{1}{2} e^{\arcsin x - \operatorname{arctg} x} \left(x + \sqrt{1-x^2}\right) + c \cdot e^{-\operatorname{arctg} x}, c \in \mathbb{R}$ 1p

Subiectul 4.

a) Arătați că $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ oricare ar fi $x > 0$.

b) Fie $F : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ o primitivă a funcției $f : (0,\infty) \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$. Arătați că F este o funcție bijectivă.

(*Gazeta Matematică nr. 5/2024*)

Soluție:

a) Fie $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, cu $h(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$.

Avem $h''(x) = e^x - 1 > 0$ pentru orice $x > 0$, deci h' este strict crescătoare pe $(0,\infty)$

Rezultă $h'(0) = 0 \le h'(x) = e^x - 1 - x$ oricare ar fi $x \ge 0$, deci h este crescătoare pe $(0,\infty)$

Rezultă $h(0) = 0 \le h(x) = e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}$ oricare ar fi $x \ge 0$, deci

$e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ oricare ar fi $x \ge 0$ 2p

b) Arătăm că funcția F este injectivă și surjectivă.

Din $F'(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}} > 0$ pentru orice $x \in (0,\infty)$, rezultă F este strict crescătoare, deci este injectivă 1p

Fie $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}, g(x)=F(x)-\frac{x^2}{2}-x-\frac{1}{2}\ln x$

$$g'(x)=x\cdot e^{\frac{1}{x}}-x-1-\frac{1}{2x}=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}\right)$$

$$e^x>1+x+\frac{x^2}{2},\forall x\in(0,\infty)\Rightarrow e^{\frac{1}{x}}>1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2},\forall x\in(0,\infty)$$

$\Rightarrow g'(x)>0,\forall x>0\Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0,\infty)$. 1p

Pentru $x>1\Rightarrow g(x)>g(1)\Rightarrow F(x)>\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln x+g(1)$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln x+g(1)\right)=\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty$ 1p

Pentru $x<1\Rightarrow g(x)<g(1)\Rightarrow F(x)<\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln x+g(1)$

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(\frac{x^2}{2}+x+\frac{1}{2}\ln x+g(1)\right)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=-\infty$ 1p

F este continuă, $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\infty,\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}}F(x)=-\infty\Rightarrow \mathrm{Im}(F)=\mathbb{R}\Rightarrow F$ este surjectivă 1p