



CONCURSUL REGIONAL DE MATEMATICĂ
„MAGICIENII NUMERELOR ”

5.04.2025

Clasa a VIII-a

NOTĂ. La **subiectul I** fiecare exercițiu are un singur răspuns corect. La **subiectul II** se scrie numai răspunsul fiecărui exercițiu. La **subiectul III** și **subiectul IV** se scrie rezolvarea completă.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Timp de lucru efectiv 2 ore.

SUBIECTUL I (30 p)

(Se scrie pe foaia de concurs doar litera corespunzătoare răspunsului corect.)

- 5 p 1. Media geometrică a numerelor : $a = \frac{4}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}$ și $b = \sqrt{5} - 1$ este:
a) 2 b) 4 c) $2\sqrt{5}$ d) 1
- 5p 2. Scrisă sub formă de interval, mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} / 4 \cdot |1 - 3x| - 2 \leq 18 - |1 - 3x|\}$ este:
a) $A = \left[-1, \frac{2}{3}\right]$ b) $A = \left[-1, \frac{5}{3}\right]$ c) $A = \left(1, \frac{5}{3}\right)$ d) $A = (-1, 5]$.
- 5p 3. Intervalul I pentru care $I \cup (\sqrt{3}, 4] = [1, 4]$ și $I \cap (\sqrt{3}, 4] = [\sqrt{3}, \sqrt{5}]$ este egal cu:
a) $(\sqrt{3}, \sqrt{5}]$ b) $[1, \sqrt{3}]$ c) $(\sqrt{3}, \sqrt{4})$ d) $[1, \sqrt{5}]$.
- 5p 4. Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 3$. Rezultatul calculului $f(1) + f(3) + f(5) + \dots + f(2025)$ este:
a) $1013 \cdot 2025$ b) 0 c) $1013 \cdot 2023$ d) 2025^2
- 5p 5. Desfășurând fețele laterale ale unui cub obținem un dreptunghi cu diagonala $20\sqrt{17}$ cm. Lungimea diagonalei cubului este:
a) 20 cm b) $10\sqrt{3}$ cm c) $20\sqrt{3}$ cm d) $4\sqrt{85}$ cm
- 5p 6. În paralelipipedul dreptunghic $ABCD A' B' C' D'$ avem $AB = 6\sqrt{3}$ cm, $BC = 6$ cm. Măsura unghiului determinat de dreptele AC și $A' B'$ este egală cu:
a) 45° b) 60° c) 90° d) 30°

SUBIECTUL II (30 p)

(Se scrie pe foaia de concurs doar numărul exercițiului și rezultatul corespunzător.)

- 3p 1. Lungimile a, b, c ale laturilor unui triunghi verifică relația
 $\sqrt{a - 24} + b^2 + |c - 12\sqrt{3}| + 144 = 24b$.
Calculați aria triunghiului.
- 3p 2. Calculați partea întreagă a numărului $n = 1 + \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{97 \cdot 101}$.
- 3p 3. Determinați valoarea minimă a numărului $N = \sqrt{x^2 + 6x + 25} + \sqrt{2y^2 + 8y + 24}$, $x, y \in \mathbb{R}$.
- 3p 4. Simplificați fracția $\frac{(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 5) + 4}{(x^2 + 2x)(x^2 + 2x - 6) + 8}$.
- 3p 5. Determinați funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde $f(2x - 1) = -4x - f(3) + 4$.
- 3p 6. Un suport de umbrelă sub formă de prismă patrulateră regulată $ABCD A' B' C' D'$ are dimensiunile $AB = 30$ cm și $AC = CC'$. Care este lungimea maximă a unei umbrele astfel încât să încapă în totalitate în suport?
- 3p 7. Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ care are $VA = 4$ cm și $\angle AVB = 30^\circ$. Calculați lungimea celui mai scurt drum de la A la D care intersectează muchiile VB și VC .
- 3p 8. Prin punctul M , exterior planului α , trec dreptele perpendiculare a și b care intersectează planul α în punctele A , respectiv B . Știind că M se proiectează pe planul α în punctul P , astfel încât $MP = 12$ cm, $AM = 24$ cm și $BM = 12\sqrt{2}$ cm, aflați aria triunghiului ABP .
- 3p 9. În piramida patrulateră regulată $VABCD$, unghiul determinat de planele (VBC) și (ABC) are măsura egală cu 45° . Aflați măsura unghiului determinat de planele (VBC) și (VAD) .
- 3p 10. Prisma triunghiulară regulată $ABCA' B' C'$ are latura bazei egală cu 16 cm și muchia laterală egală cu $16\sqrt{2}$ cm. Aflați măsura unghiului dintre dreptele $A' C$ și BC'



SUBIECTUL III (15 p)

(Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă.)

Se consideră expresia:

$$E(x, y) = (xy + 2x + 2y + 3)^2 - (xy - 2x - 2y + 5)^2$$

4p

a) Calculați $E(x, x)$

4p

b) Arătați că $\sqrt{E(n, 2)} \notin \mathbb{Q}$, pentru n număr natural nenul.

4p

c) Arătați că $E\left(x, \frac{1}{x}\right) \geq 60$, unde $x \in \mathbb{R}_+$

3p

d) Pentru numerele naturale nenule a și b demonstrați inegalitatea:

$$E\left(\frac{2ab}{a+b}, \frac{a+b}{2}\right) \leq E\left(\sqrt{ab}, \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right)$$

SUBIECTUL IV (15 p)

(Se scrie pe foaia de concurs rezolvarea completă .)

4p

Se consideră cubul $ABCD A' B' C' D'$, cu $AB = 12 \text{ cm}$, M mijlocul muchiei AB și N mijlocul muchiei BC .

4p

a) Arătați că planele $(AA'N)$ și $(D'DM)$ sunt perpendiculare.

4p

b) Determinați distanța de la D' la AN .

3p

c) Știind că O este centrul feței $BCC'B'$, $D'O \cap (ABC) = \{R\}$ și $MO \cap (DCC') = \{S\}$, arătați că $SR \parallel (DD'M)$.

d) Demonstrați că dreptele $D'O$, DN și AB sunt concurente.