

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „SIGMA”
secțiunea MATEMATICĂ

EDIȚIA a XXIX-a

10.05.2025

Clasa a VI-a

BAREM

Subiectul 1.

a) Arătați că numărul

$$\frac{1}{2025} + \frac{2}{2025} + \frac{3}{2025} + \dots + \frac{2024}{2025} = 1012.$$

b) Arătați că numărul

$$N = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{4} + \dots + \frac{2}{100}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{5} + \dots + \frac{3}{100}\right) + \dots + \left(\frac{98}{99} + \frac{98}{100}\right) + \frac{99}{100}$$

este un număr natural.

Soluție

a) Avem

$$\begin{aligned} \frac{1}{2025} + \frac{2}{2025} + \frac{3}{2025} + \dots + \frac{2024}{2025} &= \frac{1}{2025} (1 + 2 + 3 + \dots + 2024) & 1 \text{ p} \\ &= \frac{1}{2025} \cdot \frac{(1 + 2024) \cdot 2024}{2} = 1012. & 2 \text{ p} \end{aligned}$$

b) Avem

$$\begin{aligned} N &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} + \frac{2}{99} + \dots + \frac{98}{99}\right) + \left(\frac{1}{100} + \frac{2}{100} + \dots + \frac{99}{100}\right) & 1 \text{ p} \\ N &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{3}{2} + \dots + \frac{98}{2} + \frac{99}{2} = \frac{1}{2} \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 99) & 2 \text{ p} \\ N &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(1 + 99) \cdot 99}{2} = 2475 \in \mathbb{N}. & 1 \text{ p} \end{aligned}$$

Subiectul 2.

a) Arătați că numărul $A = 2^{2025} - 1$ este divizibil cu 31.b) Arătați că oricare ar fi numărul natural $n \in \mathbb{N}$, suma $S_n = 1 + 2^{5n+1} + 2^{5n+2} + 2^{5n+3} + 2^{5n+4}$ este divizibilă cu 31.

Andrei Horvat-Marc

Soluție

a) Avem

$$A = 2^{2025} - 1 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2020} + 2^{2021} + 2^{2022} + 2^{2023} + 2^{2024} \quad 1 \text{ p}$$

Prin grupare în grupe de câte cinci termeni, se obține

$$A = 31 \cdot (1 + 2^5 + \dots + 2^{2020})$$

1 p

deci

$$31 \mid A$$

1 p

b) Avem

$$S_n = 1 + 2^{5n+1} + 2^{5n+2} + 2^{5n+3} + 2^{5n+4} = 1 + 2^{5n}(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4)$$

$$S_n = 1 + (2^{5n} - 1)(2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4$$

$$S_n = 31 + 30 \cdot (2^{5n} - 1).$$

2 p

Cum $2^{5n} - 1 = 31 \cdot (1 + 2^5 + \dots + 2^{5(n-1)})$, rezultă

1 p

$$S_n = 31 + 30 \cdot 31 \cdot (1 + 2^5 + \dots + 2^{5(n-1)})$$

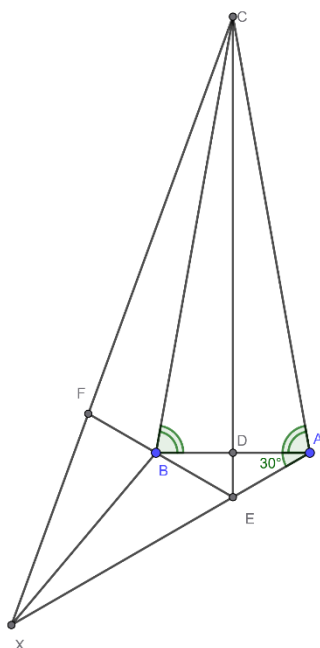
deci suma $S_n = 1 + 2^{5n+1} + 2^{5n+2} + 2^{5n+3} + 2^{5n+4}$ este divizibilă cu 31

1 p

Subiectul 3.

Fie triunghiul isoscel ABC , cu $AC = BC$ și $\angle ACB = 20^\circ$. Se consideră punctul X astfel încât punctul B se află în interiorul triunghiului ACX , $\angle XAB = 30^\circ$ și $\angle XCB = 10^\circ$. Aflați măsura unghiului $\angle BXC$.

Gazeta Matematică 2/2025



Soluție

Se duce $CE \perp AB$, $E \in AB$, $CE \cap AB = \{D\}$, $EB \cap CX = \{F\}$

Se arată că $\angle AXC = 40^\circ$

2 p

Cum CE este bisectoarea $\angle ACB$ și $\triangle ABC$ este isoscel, se arată că EC este bisectoarea $\angle AEB$

1 p

Se arată că $\angle AEC = \angle CEB = \angle BEX = 60^\circ$, deci EB este bisectoarea $\angle CEX$

1 p

Se arată că CB este bisectoarea $\angle ECX$

1 p

În triunghiul CEX , avem că B este punctul de intersecție al bisectoarelor, deci XB este bisectoarea $\angle AXC = 40^\circ$

1 p

Rezultă $\angle BXC = 20^\circ$

1 p

Subiecte selectate și propuse de către

Prof. TIVADAR CORNEL