

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „SIGMA”
secțiunea MATEMATICĂ

EDIȚIA a XXIX-a

10.05.2025

Clasa a VII-a

BAREM

Subiectul 1.

a) Arătați că pentru orice numere reale pozitive a, b, c are loc inegalitatea

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{1012}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{1012}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{1012}} \leq \frac{2025(a+b+c)}{2024}.$$

b) Determinați numărul natural nenul n pentru care are loc egalitatea

$$\sqrt{\frac{1}{1 \cdot 18} + \frac{1}{2 \cdot 27} + \frac{1}{3 \cdot 36} + \dots + \frac{1}{n(9n+9)}} = \frac{4\sqrt{2}}{17}.$$

Soluție

a) Folosind inegalitatea dintre media geometrică și media aritmetică a două numere real pozitive

$$\sqrt{x \cdot y} \leq \frac{x+y}{2}$$

se deduce că

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{1012}} \leq \frac{a+1012(b+c)}{2024}$$

$$\sqrt{\frac{b(c+c)}{1012}} \leq \frac{b+1012(b+a)}{2024}$$

$$\sqrt{\frac{c(a+b)}{1012}} \leq \frac{c+1012(a+b)}{2024}$$

3 p

Prin adunarea celor trei inegalități se obține

$$\sqrt{\frac{a(b+c)}{1012}} + \sqrt{\frac{b(c+a)}{1012}} + \sqrt{\frac{c(a+b)}{1012}} \leq \frac{2025(a+b+c)}{2024}.$$

1 p

b) Se înmulțește egalitatea cu 3 și se obține

$$\sqrt{\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}} = \frac{12\sqrt{2}}{17}. \quad 1 \text{ p}$$

Se obține

$$\sqrt{\frac{n}{n+1}} = \sqrt{\frac{288}{289}} \quad 1 \text{ p}$$

Soluția este

$$n = 288 \quad 1 \text{ p}$$

Subiectul 2.

Fie a o cifră nenulă. Arătați că numărul $A = \sqrt{a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a}$ este irațional.

Soluție

Pentru $a \in \{2, 3, 7, 8\}$ numărul $a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a$ nu este pătrat perfect, deci $A \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 2 p

Fie $n = \underbrace{100 \dots 01}_{2025 \text{ ori}}$. Cum

$$(10^{1013})^2 < n = 10^{2026} + 1 < (10^{1013} + 1)^2 \quad 2 \text{ p}$$

se deduce că n nu este pătrat perfect.

$$\text{Avem } a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a = a \cdot n$$

Pentru $a \in \{1, 4, 9\}$, avem $a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a = p^2 \cdot n$, cu $p \in \{1, 2, 3\}$,

rezultă că numărul $a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a$ nu este pătrat perfect, deci $A \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 1 p

Pentru $a = 5$, avem $5 \mid a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a$, dar $a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a$ nu este divizibil cu 25,

rezultă că numărul $a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a$ nu este pătrat perfect, deci $A \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 1 p

Pentru $a = 6$, avem $6 \mid a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a$, dar $a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a$ nu este divizibil cu 36,

rezultă că numărul $a \underbrace{00 \dots 0}_{2025 \text{ ori}} a$ nu este pătrat perfect, deci $A \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. 1 p

Subiectul 3.

Fie triunghiul dreptunghic ABC , cu $\angle C = 15^\circ$. Punctul D este piciorul înălțimii corespunzătoare ipotenuzei BC , iar M este mijlocul ipotenuzei BC . Punctul E este situat pe latura AC astfel încât $\angle CME = 30^\circ$. Demonstrați că $AD = BD + ME$.

Gazeta Matematică 2/2025

Soluție

Varianta 1.

Fie $F \in AC$ astfel încât $MF \parallel AB$

Se arată că $AD = \frac{BC}{4} = x$

2 p

În $\triangle ADM$, cu $\angle D = 90^\circ$, se obține $MD = x\sqrt{3}$, deci $BD = BM - MD = x(2 - \sqrt{3})$

1 p

În $\triangle ABC$, cu $\angle A = 90^\circ$, se obține $AB = x\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)$

1 p

Cum MF este linie mijlocie în $\triangle ABC$, deci $FM = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)x}{2}$

1 p

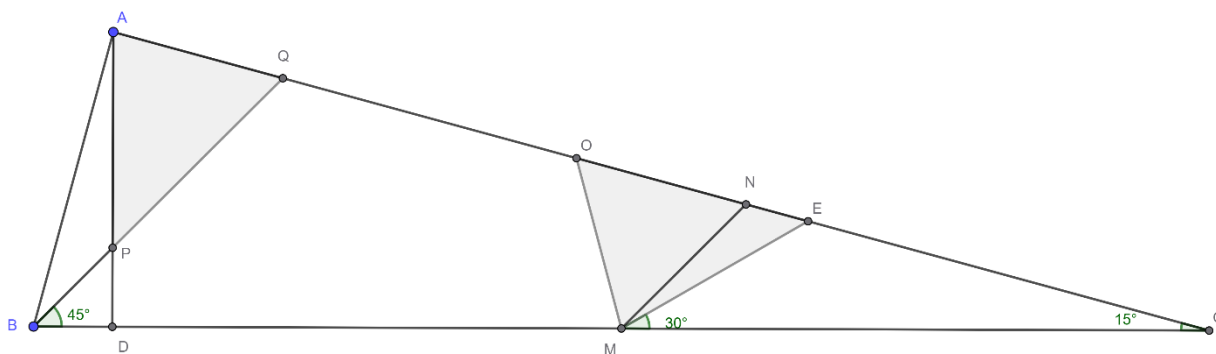
În $\triangle EFM$, cu $\angle F = 90^\circ$, se obține $EM = x(\sqrt{3} - 1)$

1 p

Se obține $BD + ME = x(2 - \sqrt{3}) + x(\sqrt{3} - 1) = x = AD$

1 p

Varianta 2.



Fie $P \in AD$ astfel ca $\angle PBD = 45^\circ$, $BP \cap AC = \{Q\}$, $MN \parallel BQ$, $N \in AC$,

$O \in AC$ astfel ca $\angle NMO = 60^\circ$.

Dacă $\angle PBD = 45^\circ$, atunci $\angle ABQ = 30^\circ$, deci $AQ = \frac{1}{2} \cdot BQ$

1 p

Din $MN \parallel BQ$ avem $\triangle CBQ \sim \triangle CMN$, deci $\frac{MN}{BQ} = \frac{MC}{BC} = \frac{1}{2}$, rezultă $MN = \frac{1}{2} \cdot BQ$

Din cele două egalități se obține $AQ = MN$

1 p

Cum $\angle BQA = 60^\circ$ și $MN \parallel BQ$, rezultă $\angle BQA = \angle MNO = 60^\circ = \angle NMO$, deci MNO este triunghi echilateral. Atunci $MN = MO = AQ$.

1 p

Avem $\angle PAQ = \angle EMO = 75^\circ$, $AQ = MO$, $\angle AQP = \angle MOE = 60^\circ$, deci conform cazului de congruență U.L.U. rezultă $\triangle AQP \equiv \triangle MOE$. Atunci $AP = ME$.

2 p

Cum $\angle DBP = 45^\circ$, avem că BDP este triunghi dreptunghic isoscel, cu $BD = DP$.

1 p

Cum $AD = DP + PA$ și $DP = BD$, $PA = ME$, rezultă $AD = BD + ME$.

1 p