

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „SIGMA”
secțiunea MATEMATICĂ**EDIȚIA a XXIX-a****10.05.2025****Clasa a VIII-a****BAREM****Subiectul 1.****a) Determinați partea întreagă a numărului**

$$a = \frac{1}{(2 - \sqrt{3})^2}.$$

b) Fie numerele reale x și y , cu $x \in (2025, 2069)$, $y > 0$ și $y^2 = x + 1$. Determinați partea întreagă a numărului real

$$b = \frac{1}{y - \sqrt{x}}.$$

Soluție**a) Avem**

$$a = \frac{1}{(2 - \sqrt{3})^2} = \frac{1}{7 - 4\sqrt{3}} = 7 + 4\sqrt{3} = 7 + \sqrt{48}$$

2 pCum $6 = \sqrt{36} \leq \sqrt{48} < \sqrt{49} = 7$, avem că $[4\sqrt{3}] = 6$, deci $[a] = 13$ **1 p****b) Avem**

$$b = \frac{1}{y - \sqrt{x}} = \frac{y + \sqrt{x}}{y^2 - x} = y + \sqrt{x} \leq 2 \cdot \sqrt{\frac{y^2 + x}{2}} = 2 \cdot \sqrt{x + \frac{1}{2}}$$

1 pCum $2025 < x < 2069$, avem

$$90 = 2\sqrt{2025} < 2\sqrt{x + \frac{1}{2}} = \sqrt{4x + 2} < \sqrt{4 \cdot 2069 + 2} = \sqrt{8278} < \sqrt{8281} = 91$$

deci $[b] < 91$ **1 p**Din $y > 0$ și $y^2 = x + 1$, avem $y = \sqrt{x + 1} \in (\sqrt{2026}, 46)$, deci $[y] = 45$ Cum $[y] + [\sqrt{x}] \leq [b]$, rezultă $90 \leq [b]$ **1 p**

În concluzie, avem

$$[b] = 90$$

1 p

Subiectul 2.

Fie numerele reale strict pozitive x, y, z astfel încât $x + y + z = 24$ și $xy + yz + zx = 192$. Calculați

$$\frac{x^4}{y} + \frac{y^4}{z} + \frac{z^4}{x}.$$

Soluție

Cum

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 192 \quad 1 \text{ p}$$

$$\text{se obține } x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx, \text{ deci } x = y = z \quad 3 \text{ p}$$

$$\text{Se determină } x = y = z = 8 \quad 2 \text{ p}$$

deci

$$\frac{x^4}{y} + \frac{y^4}{z} + \frac{z^4}{x} = 3 \cdot x^3 = 3 \cdot 8^3 = 1536. \quad 1 \text{ p}$$

Subiectul 3.

Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și M, N, P, Q patru puncte coplanare astfel încât $M \in (AB)$, $N \in (BC)$, $P \in (CD)$, respectiv $Q \in (DA)$. Arătați că

$$MN \cdot NP \cdot PQ \cdot QM \geq AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ.$$

Soluție

În triunghiul MBN avem

$$MN^2 = MB^2 + BN^2 - 2 \cdot MB \cdot BN \cdot \cos 60^\circ \quad 1 \text{ p}$$

$$MN^2 = MB^2 + BN^2 - MB \cdot BN \geq MB \cdot BN$$

Analog se obțin inegalitățile

$$NP^2 \geq NC \cdot CP$$

$$PQ^2 \geq PD \cdot DQ$$

$$QM^2 \geq QA \cdot AM \quad 1 \text{ p}$$

Prin înmulțirea celor patru relații rezultă

$$MN^2 \cdot NP^2 \cdot PQ^2 \cdot QM^2 \geq MB \cdot BN \cdot NC \cdot CP \cdot PD \cdot DQ \cdot QA \cdot AM \quad 1 \text{ p}$$

Din Teorema lui Menelaus rezultă

$$AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ = MB \cdot NC \cdot PD \cdot QA \quad 2 \text{ p}$$

Rezultă

$$(MN \cdot NP \cdot PQ \cdot QM)^2 \geq (AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ)^2 \quad 1 \text{ p}$$

deci

$$MN \cdot NP \cdot PQ \cdot QM \geq AM \cdot BN \cdot CP \cdot DQ. \quad 1 \text{ p}$$

Subiecte selectate și propuse de către

Prof. TIVADAR CORNEL