

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „SIGMA”
secțiunea MATEMATICĂ

EDIȚIA a XXIX-a

10.05.2025

Clasa a IX-a

BAREM

Subiectul 1.

Fie triunghiul ABC și punctele M, N, P situate pe laturile BC, CA , respectiv AB astfel încât $AM \cap BN \cap CP = \{X\}$ și $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$. Arătați că $\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XP} = \vec{0}$.

Soluție

Facem notațiile $\frac{AP}{PB} = x$, $\frac{BM}{MC} = y$ și $\frac{CN}{NA} = z$. Din Teorema lui Ceva avem

$$x \cdot y \cdot z = 1 \quad 1 \text{ p}$$

Cum

$$\overrightarrow{BM} = \frac{y}{y+1} \cdot \overrightarrow{BC}, \quad \overrightarrow{AP} = \frac{x}{x+1} \cdot \overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{CN} = \frac{z}{z+1} \cdot \overrightarrow{CA} \quad 1,5 \text{ p}$$

egalitatea $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$, implică

$$\vec{0} = \frac{y}{y+1} \cdot \overrightarrow{BC} + \frac{x}{x+1} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{z}{z+1} \cdot \overrightarrow{CA} = \left(\frac{y}{y+1} - \frac{z}{z+1} \right) \cdot \overrightarrow{BC} + \left(\frac{x}{x+1} - \frac{z}{z+1} \right) \cdot \overrightarrow{AB} \quad 2 \text{ p}$$

Liniar independența vectorilor $\overrightarrow{AB}$ și $\overrightarrow{BC}$ implică $x = y = z$. 0,5 p

Din $xyz = 1$, rezultă $x = y = z = 1$, 1 p

deci X este centrul de greutate al triunghiului ABC , de unde rezultă $\overrightarrow{XM} + \overrightarrow{XN} + \overrightarrow{XP} = \vec{0}$ 1 p

Subiectul 2.

Demonstrați că numărul natural $3^{n+2} + 9^{n+1} + 4^{2n+1} + 4^{4n+1}$ se divide cu 13 pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Gazeta Matematică (supliment) 2/2025

Soluție Varianta 1

Fie $N_n = 3^{n+2} + 9^{n+1} + 4^{2n+1} + 4^{4n+1}$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Se folosește *principiul inducției matematice* pentru a demonstra că propoziția

$$P(n): N_n : 13$$

este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$.

Pasul de verificare: Propoziția $P(0): N_0 = 3^2 + 9 + 4 + 4 = 2 \cdot 13 : 13$ este adevărată 1 p

Pasul inducției: Presupunem că propoziția $P(k)$ este adevărată și arătăm că și propoziția $P(k+1)$ este adevărată. Avem că există $K \in \mathbb{N}^*$ pentru care

$$3^{k+2} + 9^{k+1} + 4^{2k+1} + 4^{4k+1} = 13 \cdot K$$

și

$$N_{k+1} = 3^{k+3} + 9^{k+2} + 4^{2k+3} + 4^{4k+5} = 3 \cdot 3^{k+2} + (3+6)9^{k+1} + (3+13)4^{2k+1} + (3+253)4^{4k+1} \quad 1 \text{ p}$$

$$= 3(3^{k+2} + 9^{k+1} + 4^{2k+1} + 4^{4k+1}) + 6 \cdot 9^{k+1} + 13 \cdot 4^{2k+1} + (6+247) \cdot 4^{4k+1} \quad 1 \text{ p}$$

$$= 3 \cdot 13 \cdot K + 13 \cdot 4^{2k+1}(1 + 19 \cdot 4^{2k}) + 6 \cdot 13 \cdot 9^k + 6(4 \cdot 4^{4k} - 4 \cdot 9^k) = 3 \cdot 13 \cdot K + 13 \cdot 4^{2k+1}(1 + 19 \cdot 4^{2k}) + 6 \cdot 13 \cdot 9^k + 6 \cdot 4 \cdot (4^{4k} - 9^k) \quad 1 \text{ p}$$

Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ există $m \in \mathbb{N}$ pentru care

$$4^{4k} - 9^k = (4^4 - 9) \cdot m = 247 \cdot m = 13 \cdot 19 \cdot m \quad 1 \text{ p}$$

deci

$$N_{k+1} = 13 \cdot (3K + 4^{2k+1}(1 + 19 \cdot 4^{2k}) + 6 \cdot 9^k + 24 \cdot 19 \cdot m) : 13 \quad 1 \text{ p}$$

Conform *principiului inducției matematice* rezultă că propoziția $P(n)$: $N_n : 13$ este adevărată oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. 1 p

Soluție Varianta 2

Conform formulei $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + a^{n-3} \cdot b^2 + \dots + a \cdot b^{n-2} + b^{n-1})$

avem că există $K_1(n), K_2(n) \in \mathbb{N}^*$ pentru care

$$4^{4n} - 9^n = (4^4)^n - 9^n = (256 - 9) \cdot K_1(n) = 13 \cdot 19 \cdot K_1(n), \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 \text{ p}$$

$$4^{2n} - 3^n = (4^2)^n - 3^n = (16 - 3) \cdot K_2(n) = 13 \cdot K_2(n), \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 2 \text{ p}$$

Fie $n \in \mathbb{N}$. Avem

$$N_n = 3^{n+2} + 9^{n+1} + 4^{2n+1} + 4^{4n+1} = (4 \cdot 4^{4n} + 9 \cdot 9^n) + (9 \cdot 3^n + 4 \cdot 4^{2n}) = 4(4^{4n} - 9^n) + 13 \cdot 9^n + 4(4^{2n} - 3^n) + 13 \cdot 3^n$$

Deci, există $K_1(n), K_2(n) \in \mathbb{N}^*$ pentru care

$$N_n = 4 \cdot 13 \cdot 19 \cdot K_1(n) + 4 \cdot 13 \cdot K_2(n) + 13(9^n + 3^n) \quad 2 \text{ p}$$

ceea ce implică $N_n : 13$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$. 1 p

Subiectul 3. Fie $a, b \in \mathbb{N}^*$ și ecuația

$$(a+b)x^2 - (a+b)^2x + a^2 + b^2 + ab = 1.$$

a) Arătați că ecuația are două soluții reale.

b) Arătați că, dacă $a \geq 2$ și $b \geq 2$, atunci ecuația nu are soluții întregi.

Gazeta Matematică, 11/2024

Soluție

a) Cum $a + b \neq 0$, ecuația se scrie sub forma echivalentă

$$x^2 - (a + b)x + (a + b) - \frac{1 + ab}{a + b} = 0$$

cu discriminantul

$$\Delta = (a + b)^2 - 4(a + b) + 4 \cdot \frac{1 + ab}{a + b}$$

1 p

$$\Delta = (a + b - 2)^2 + 4 \cdot \frac{(a - 1)(b - 1)}{a + b} \geq 0$$

oricare ar fi $a, b \in \mathbb{N}^*$, ceea ce implică existența a două soluții reale pentru ecuația considerată.

2 p

b) Pentru $a \geq 2$ și $b \geq 2$, ecuația

$$x^2 - (a + b)x + (a + b) - \frac{1 + ab}{a + b} = 0$$

are soluțiile $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 \neq x_2$, pentru care

$$s = x_1 + x_2 = a + b \in \mathbb{N} \cap [4, \infty), p = x_1 x_2 = (a + b) - \frac{1 + ab}{a + b} = \frac{a^2 + b^2 + ab - 1}{a + b} > 0 \text{ și}$$

$$(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1 - \frac{1 + ab}{a + b} < 1.$$

1 p

Presupunem că există cel puțin o soluție întreagă, adică $x_1 \in \mathbb{Z}^*$ și $x_1 < x_2$.

Din $x_1 + x_2 \in \mathbb{N} \cap [4, \infty)$ rezultă că $x_2 \in \mathbb{N}$, cu $x_1 x_2 > 0$, deci $1 \leq x_1 < x_2$

și $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1 - \frac{1 + ab}{a + b} \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$

1,5 p

Dacă $x_1 = 1$, atunci $0 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) = 1 - \frac{1 + ab}{a + b}$, deci

$$a + b = 1 + ab \Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 0$$

egalitate care nu are loc pentru $a \geq 2$ și $b \geq 2$.

0,5 p

Dacă $2 \leq x_1 < x_2$, atunci $1 < (x_1 - 1)(x_2 - 1)$, contradicție cu $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 1$.

0,5 p

În concluzie, pentru $a \geq 2$ și $b \geq 2$, ecuația nu are soluții numere întregi.

0,5 p

Subiecte selectate și propuse de către

Prof. GIURGI VASILE