

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „SIGMA”
secțiunea MATEMATICĂ

EDIȚIA a XXIX-a

10.05.2025

Clasa a X-a

BAREM

Subiectul 1. Pentru orice număr natural nenul $n \in \mathbb{N}^*$ se definesc numerele $N_n = (2 + \sqrt{3})^n$,

$$x_n = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} \cdot 2^{2(n-k)} \cdot 3^k \quad \text{și} \quad y_n = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k+1} \cdot 2^{2(n-k)-1} \cdot 3^k.$$

a) Arătați că $[N_n]$ este un număr natural impar, unde prin $[a]$ s-a notat partea întreagă a numărului real $a \in \mathbb{R}$.**b)** Arătați că x_n și y_n sunt numere coprime.**Soluție****a)** Se definesc șirurile de numere naturale nenule $(a_n)_{n \geq 1}$ și $(b_n)_{n \geq 1}$ astfel încât

$$N_n = (2 + \sqrt{3})^n = a_n + b_n \sqrt{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Atunci

$$(2 - \sqrt{3})^n = a_n - b_n \sqrt{3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \text{ p}$$

Rezultă

$$(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

deci

$$(2 + \sqrt{3})^n = (2a_n - 1) + 1 - (2 - \sqrt{3})^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \text{ p}$$

Cum

$$0 < 1 - (2 - \sqrt{3})^n < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad 1 \text{ p}$$

avem că

$$[N_n] = [(2 + \sqrt{3})^n] = 2a_n - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

este un număr impar. 1 p**b)** Cum

$$(2 + \sqrt{3})^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} C_{2n}^i \cdot 2^{2n-i} \cdot 3^{\frac{i}{2}} = \sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k} \cdot 2^{2(n-k)} \cdot 3^k + \left(\sum_{k=0}^n C_{2n}^{2k+1} \cdot 2^{2(n-k)-1} \cdot 3^k \right) \sqrt{3}$$

avem

$$\begin{aligned} (2 + \sqrt{3})^{2n} &= x_n + y_n \sqrt{3} \\ (2 - \sqrt{3})^{2n} &= x_n - y_n \sqrt{3} \end{aligned} \quad 1 \text{ p}$$

Atunci

$$1 = (2 + \sqrt{3})^{2n} \cdot (2 - \sqrt{3})^{2n} \Leftrightarrow 1 = x_n^2 - 3y_n^2 \quad 1 \text{ p}$$

Dacă d este un divizor comun al numerelor x_n și y_n , atunci există numerele naturale nenule p_n și q_n pentru care $x_n = d \cdot p_n$, respective $y_n = d \cdot q_n$, cu $(p_n, q_n) = 1$. Cum $d \mid x_n^2 - 3y_n^2$, rezultă că $d \mid 1$, deci $d = 1$, ceea ce este echivalent cu faptul că x_n și y_n sunt numere coprime. 1 p

Subiectul 2. Fie $a, b, c \in \mathbb{C}^*$ și ecuația $az^2 + bz + c = 0$, cu rădăcinile $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

a) Arătați că $|z_1| = |z_2|$ dacă și numai dacă $\frac{b^2}{ac} \in \mathbb{R} \cap [0, 4]$.

b) Demonstrați că dacă $\omega \in \{z_1, z_2\}$ și $\frac{b^2}{ac} \in \mathbb{R} \cap (0, 4]$, atunci $|b| < 2 \cdot |a\omega|$.

Vasile Giurgi

Soluție

a) Din $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$ și $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ se obține

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2 \quad 1 \text{ p}$$

Pentru $z_k = r_k \cdot [\cos(t_k) + i \cdot \sin(t_k)]$, $k = \overline{1, 2}$, cu $r_1, r_2 \in (0, \infty)$, se obține

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2 = \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}\right) \cos(t_1 - t_2) + i \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1}\right) \sin(t_1 - t_2) + 2. \quad 1 \text{ p}$$

„ $\Rightarrow$ ” Pentru $|z_1| = |z_2| = r$, cu $z_k = r \cdot [\cos(t_k) + i \cdot \sin(t_k)]$, $k = \overline{1, 2}$ rezultă

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2 = \cos(t_1 - t_2) + i \cdot \sin(t_1 - t_2) + \cos(t_2 - t_1) + i \cdot \sin(t_2 - t_1) + 2$$

Din paritatea, respective imparitatea, funcțiilor trigonometrice, se obține

$$\frac{b^2}{ac} = 4 \cdot \cos^2\left(\frac{t_1 - t_2}{2}\right) \in \mathbb{R} \cap [0, 4] \quad 1 \text{ p}$$

„ $\Leftarrow$ ” Presupunem că $\frac{b^2}{ac} \in \mathbb{R} \cap [0, 4]$ și $|z_1| \neq |z_2|$. Avem

$$\frac{b^2}{ac} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2 = \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}\right) \cos(t_1 - t_2) + i \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} - \frac{r_2}{r_1}\right) \sin(t_1 - t_2) + 2 \in \mathbb{R} \cap [0, 4].$$

Atunci $\sin(t_1 - t_2) = 0$, deci $t_1 - t_2 = n\pi$, unde $n \in \mathbb{Z}$,

ceea ce implică $\cos(t_1 - t_2) = (-1)^n$, cu $n \in \mathbb{Z}$. Deci $\frac{b^2}{ac} = \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}\right) \cdot (-1)^n + 2 \quad 1 \text{ p}$

Pentru orice $r_1, r_2 \in (0, \infty)$, cu $r_1 \neq r_2$, avem $\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1} > 2$,

deci $\left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}\right) \cdot (-1)^n + 2 \in \mathbb{R} \setminus (0, 4)$, contradicție cu $\frac{b^2}{ac} = \left(\frac{r_1}{r_2} + \frac{r_2}{r_1}\right) \cdot (-1)^n + 2 \in [0, 4]$.

În concluzie, dacă $\frac{b^2}{ac} \in \mathbb{R} \cap [0, 4]$, atunci $|z_1| = |z_2|$. 1 p

b) Dacă $k = \frac{b^2}{ac} \in \mathbb{R} \cap (0, 4]$, atunci $\Delta = b^2 - 4ac = b^2 \left(1 - \frac{4}{k}\right)$, unde $1 - \frac{4}{k} < 0$.

Cum

$$\omega = \frac{-b \pm i \sqrt{b^2 \left(\frac{4}{k} - 1\right)}}{2a} = -\frac{b}{2a} \left(1 \mp i \sqrt{\frac{4}{k} - 1}\right) \quad 1 \text{ p}$$

cu

$$|\omega| = \frac{|b|}{2|a|} \sqrt{1 + \frac{4}{k} - 1} \Rightarrow |b| = |a\omega| \cdot \sqrt{k} < 2 \cdot |a\omega| \quad 1 \text{ p}$$

Subiectul 3. Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \setminus \{0, 45\} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $g(x) = 2f(x) - 45 \left(1 - \frac{45}{x}\right)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 45\}$.

a) Determinați funcția f pentru care egalitatea

$$f(x) + f\left(\frac{2025}{45 - x}\right) = x$$

are loc oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 45\}$.

b) Arătați că funcția g nu este injectivă.

Andrei Horvat-Marc

Soluție

a) Pentru $x = \frac{2025}{45 - s}$, avem $\frac{2025}{45 - s} = 45 \left(1 - \frac{45}{s}\right)$, deci

$$f\left(\frac{2025}{45 - s}\right) + f\left(45 \left(1 - \frac{45}{s}\right)\right) = \frac{2025}{45 - s}, \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 45\}$$

1 p

Cum $f\left(\frac{2025}{45 - x}\right) = x - f(x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 45\}$, egalitatea de mai sus devine

$$s - f(s) + f\left(45 \left(1 - \frac{45}{s}\right)\right) = \frac{2025}{45 - s}, \forall s \in \mathbb{R} \setminus \{0, 45\}$$

1 p

Pentru $s = \frac{2025}{45 - x}$, avem $45 \left(1 - \frac{45}{s}\right) = x$, iar egalitatea precedentă devine

$$\frac{2025}{45 - x} - (x - f(x)) + f(x) = 45 \left(1 - \frac{45}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 45\}$$

1 p

de unde se obține

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{2025}{2(45-x)} + \frac{45}{2} \left(1 - \frac{45}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 45\}.$$

1 p**b) Se obține**

$$g(x) = x - \frac{2025}{45-x}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 45\}.$$

1 p

Cum

$$g(x) - g(y) = (x - y) \left(1 - \frac{2025}{(45-x)(45-y)}\right) = \frac{x-y}{(45-x)(45-y)} (xy - 45x - 45y)$$

Egalitatea $g(x) = g(y)$ are loc atât pentru $x = y$, cât și pentru $y = \frac{45x}{x-45}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 45\}$.**1 p**Cum $x \neq \frac{45x}{x-45}$ și $g(x) = g\left(\frac{45x}{x-45}\right)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 45, 90\}$, rezultă că funcția g nu este injectivă.**1 p**

Subiecte selectate și propuse de către
Prof. GIURGI VASILE