

CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „SIGMA”
secțiunea MATEMATICĂ

EDIȚIA a XXIX-a

10.05.2025

Clasa a XI-a

BAREM

Subiectul 1. Fie numerele reale nenule $a, b \in \mathbb{R}^*$, cu $3a^2 - b^2 = 0$, matricea $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^*)$, șirurile de numere reale $(x_n)_{n \geq 1}$, $(y_n)_{n \geq 1}$ pentru care

$$\frac{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}{x_n^2 + y_n^2} = \det(A), \quad \text{oricare ar fi } n \geq 1$$

și mulțimile X, Y a căror elemente sunt numerele reale ce reprezintă termenii șirurilor $(x_n)_{n \geq 1}$, respectiv $(y_n)_{n \geq 1}$. Arătați că dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $x_k = y_k$, atunci mulțimea $X \cap Y$ are o infinitate de elemente.

Andrei Horvat-Marc

Soluție

Din $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ se obține $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n - by_n \\ y_{n+1} = bx_n + ay_n \end{cases}$ 1 p

Cum $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (ax_n - by_n)^2 + (bx_n + ay_n)^2 = (a^2 + b^2)(x_n^2 + y_n^2)$ implică

$$\frac{x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2}{x_n^2 + y_n^2} = \det(A), \quad \text{oricare ar fi } n \geq 1$$
 1 p

se obține $x_{n+2} = 2ax_{n+1} - (a^2 + b^2)x_n$ și $y_{n+2} = 2ay_{n+1} - (a^2 + b^2)y_n$, $n \geq 1$. 1 p

Atunci $x_{n+3} = -8a^3x_n$ și $x_{n+6} = (2a)^6x_n$, $n \geq 1$. Analog $y_{n+6} = (2a)^6y_n$, $n \geq 1$. 2 p

Dacă există $k \in \mathbb{N}^*$ pentru care $x_k = y_k$, atunci $x_{k+6p} = y_{k+6p}$ oricare ar fi $p \in \mathbb{N}$ 1 p

deci termenii de rang $k + 6p$ din ambele șiruri $(x_n)_{n \geq 1}$ și $(y_n)_{n \geq 1}$ sunt egali, ceea ce implică faptul că mulțimea $X \cap Y$ are o infinitate de elemente. 1 p

Subiectul 2. Funcția $\cosh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, numită *cosinus hiperbolic*, este definită prin $\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$. Fie $a \in [-1, 1]$ un număr real. Arătați că pentru orice număr real $x \in \mathbb{R}$ are loc inegalitatea

$$a \cdot \cos(x) + \cosh(x) \geq 1 + a.$$

Ovidiu F. Pop

Soluție

Fie $a \in [-1, 1]$ și funcția $f_a: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f_a(x) = a \cdot \cos(x) + \cosh(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Cum f_a este o funcție pară, continuă pe $\mathbb{R}$, este suficient să arătăm că

1 p

$$f_a(x) \geq 1 + a \text{ oricare ar fi } x \geq 0.$$

Avem

$$f'_a(x) = -a \cdot \sin(x) + \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad 1 \text{ p}$$

$$f''_a(x) = -a \cdot \cos(x) + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad 1 \text{ p}$$

Cum $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \geq 1$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, rezultă $f''_a(x) \geq 1 - a \cdot \cos(x)$,
iar pentru $a \in [-1, 1]$ avem

$$f''_a(x) \geq 0 \text{ oricare ar fi } x \geq 0 \quad 1 \text{ p}$$

Atunci f'_a este o funcție crescătoare pe $(0, \infty)$, deci

$$f'_a(x) \geq f'_a(0) = 0 \text{ oricare ar fi } x \geq 0 \quad 1 \text{ p}$$

Atunci f_a este o funcție crescătoare pe $(0, \infty)$, deci $f_a(x) \geq f_a(0)$, ceea ce implică

$$a \cdot \cos(x) + \cosh(x) \geq a + 1 \text{ oricare ar fi } x \geq 0 \quad 1 \text{ p}$$

Cum f_a este o funcție pară, crescătoare pe $(0, \infty)$, deci descrescătoare pe $(-\infty, 0)$,
avem că

$$f_a(x) = a \cdot \cos(x) + \cosh(x) \geq f_a(0) = 1 + a, \forall x \in \mathbb{R}. \quad 1 \text{ p}$$

Subiectul 3. Pentru o matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, cu $n \in \mathbb{N}^*$, notăm cu M^* adjuncta ei, iar urma ei cu $\text{tr}(M)$.
Fie $A \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{C})$ și $B \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{C})$ două matrice. Arătați că dacă matrice AB este singulară, atunci
 $\text{tr}((BA)^*) = \det(BA) = 0$.

Soluție

Prin $P_M(X)$ notăm polinomul caracteristic al matricei $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Dacă $AB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ este o matrice singulară, atunci $\det(AB) = 0$ și 1 p

$$P_{AB}(X) = X^3 - \text{tr}(AB) \cdot X^2 + \text{tr}((AB)^*) \cdot X \quad 2 \text{ p}$$

Avem

$$P_{BA}(X) = X \cdot P_{AB}(X) = X^4 - \text{tr}(AB) \cdot X^3 + \text{tr}((AB)^*) \cdot X^2 \quad 1 \text{ p}$$

și

$$P_{BA}(X) = X^4 - \text{tr}(BA) \cdot X^3 + \alpha \cdot X^2 - \text{tr}((BA)^*) \cdot X + \det(BA) \quad 1 \text{ p}$$

Prin identificarea coeficienților se obține

$$\text{tr}((BA)^*) = \det(BA) = 0. \quad 2 \text{ p}$$

Subiecte selectate și propuse de către

Prof. POP OVIDIU-FLORIN