CONCURSUL INTERJUDEȚEAN DE MATEMATICĂ ȘI INFORMATICĂ „SIGMA”

secțiunea MATEMATICĂ

EDIȚIA a XXIX-a

10.05.2025

Clasa a XII-a

BAREM

Subiectul 1. Fie $(A,+,\cdot)$ un inel comutativ, $a \in A \setminus \{0\}$ și $p \in A \setminus \{0,-a\}$ astfel încât $p(p+a)=0$. Determinați produsul rădăcinilor nenule ale ecuației

$$x^2+ax=0.$$

Soluție

Notăm cu P produsul căutat.

Din ipoteză avem că ecuația $x^2+ax=0$ admite soluțiile distincte $x_1=0$, $x_2=-a$ și $x_3=p$. **0,25 p**

Din $p \neq -a$, avem $p+a \neq 0$, deci $-(p+a) \neq 0$. **0,25 p**

Din $p \neq 0$, avem $p+a \neq a$, deci $-(p+a) \neq -a$. **0,25 p**

Pentru $x:=-(p+a)$, avem

$$x^2+ax=\big(-(p+a)\big)^2+a\big(-(p+a)\big)=p^2+2pa+a^2-ap-a^2=p^2+ap=0.$$ **1 p**

Deci $x_4=-(p+a)$ este o altă soluție nenulă a ecuației considerate. **0,25 p**

Caz I. Dacă $2p+a=0$, atunci $x_3=x_4$ și avem

$$x_2\cdot x_3=(-a)p=2p\cdot p=2p^2$$ **1 p**

Dar $-ap=p^2$, deci $2p^2=p^2$ ceea ce implică $p^2=0$. Rezultă că $x_2\cdot x_3=0$, iar cum produsul P are ca factor produsul $x_2\cdot x_3$, se de deduce că $P=0$. **1 p**

Caz II. Dacă $2p+a \neq 0$, adică $x_3 \neq x_4$ și

$$x_3\cdot x_4=p\cdot\big(-(p+a)\big)=-(p^2+pa)=0$$ **1 p**

Cum produsul P are ca factor produsul $x_3\cdot x_4$, se de deduce că $P=0$. **1 p**

În concluzie, produsul rădăcinilor nenule ale ecuației $x^2+ax=0$ este

$$P=0.$$ **1 p**

Subiectul 2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural nenul și numerele reale $a_i \in \mathbb{R}$, $i=\overline{1,2n+1}$ astfel încât

$$\frac{a_1}{2n+1}+\frac{a_3}{2n-1}+\frac{a_5}{2n-3}+\cdots+\frac{a_{2n-1}}{3}+\frac{a_{2n+1}}{1}=0.$$

Arătați că ecuația

$$a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+a_2x^{2n-1}+\cdots+a_{2n-1}x^2+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

are cel puțin o soluție în intervalul $[-1,1]$.

Sighetu Marmației, Mihai Viteazu 14, Maramureș 435500
Tel. 0786813070, Email: cndv.sighet@gmail.com,
Web: www.cndv.ro

Soluție

Fie funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x^2 + a_{2n} x + a_{2n+1}$$

Avem

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \left(a_0 \cdot \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + a_1 \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots + a_{2n-1} \cdot \frac{x^3}{3} + a_{2n} \cdot \frac{x^2}{2} + a_{2n+1} \cdot x \right) \Bigg|_{-1}^{1}$$

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \frac{a_1}{2n+1} + \frac{a_3}{2n-1} + \frac{a_5}{2n-3} + \cdots + \frac{a_{2n-1}}{3} + \frac{a_{2n+1}}{1} = 0$$

4 p

Conforma teoremei de medie, există $c \in [-1,1]$ pentru care

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = 2 \cdot f(c)$$

2 p

Deci, există $c \in (-1,1)$ astfel încât $f(c) = 0$, ceea ce revine la faptul că ecuația

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + \cdots + a_{2n-1} x^2 + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0$$

are cel puțin o soluție în intervalul $[-1,1]$. **1 p**

Subiectul 3. Fie numerele reale $a < b$ și $\overline{x} = x + \frac{b-a}{2}$ oricare ar fi $x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. Fie $f: [a,b] \to [0,\infty]$ o funcție integrabilă Riemann pe $[a,b]$, al cărei grafic este simetric față de dreapta $2x = a + b$ și pentru care are loc egalitatea

$$\int_a^x f(t)dt + \int_{\overline{a}}^{\overline{x}} f(t)dt = (x-a)f(x) + (\overline{a} - \overline{x})f(\overline{x}), \qquad \forall x \in \left[a, \frac{3a+b}{4}\right]$$

Arătați că

$$\text{dacă } \int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{4} \cdot \big(f(a) + f(b)\big), \text{atunci } f(a) = f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right).$$

Andrei Horvat-Marc

Soluție

Cum funcția f are graficul simetric față de dreapta $2x = a + b$, avem că $f(x) = f(a + b - x)$ oricare ar fi $x \in [a,b]$, deci au loc egalitățile $f(a) = f(b)$, respectiv

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right) = f\left(\frac{a+3b}{4}\right)$$

1 p

Fie $h = \frac{b-a}{4}$. Avem

$a + h = \frac{3a+b}{4}, a + 2h = \frac{a+b}{4}, a + 3h = \frac{a+3b}{4}, \overline{a} = \frac{a+b}{2} = a + 2h$ și $\overline{a+h} = a + 3h$, deci

$$f(a+h) = f(\overline{a+h}).$$

4 p

Cu schimbarea de variabilă $t \coloneqq a+b-s$ se obține

$$\int_a^{a+h} f(t)dt = \int_{a+3h}^{b} f(s)\, ds$$

$$\int_{\overline{a}}^{\overline{a+h}} f(t)\, dt = \int_{a+2h}^{a+3h} f(s)\, ds = \int_{a+h}^{a+2h} f(s)\, ds$$

Din

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^{a+h} f(t)\, dt + \int_{a+h}^{a+2h} f(t)\, dt + \int_{a+2h}^{a+3h} f(t)\, dt + \int_{a+3h}^{b} f(t)\, dt$$

și din egalitățile anterioare, se obține

$$\int_a^b f(t)\, dt = 2\left[\int_a^{a+h} f(t)\, dt + \int_{\overline{a}}^{\overline{a+h}} f(t)\, dt\right]$$ **1 p**

Folosind egalitatea din ipoteză (cu $x \coloneqq a+h$), rezultă

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)\, dt &= 2(a+h-a)\left[f(a+h) + f(\overline{a+h})\right]\\ &= 2h[f(a+h) + f(a+3h)]\\ &= (b-a)\cdot f(a+h) = (b-a)\cdot f\left(\frac{3a+b}{4}\right)\end{aligned}$$

Cum

$$\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{4}\cdot\big(f(a)+f(b)\big) = \frac{1}{2}(b-a)\cdot f(a),$$

se obține

$$\frac{1}{2}\cdot f(a) = f\left(\frac{3a+b}{4}\right),$$

deci

$$f(a) = 2\cdot f\left(\frac{3a+b}{4}\right) = f\left(\frac{3a+b}{4}\right) + f\left(\frac{a+3b}{4}\right).$$ **1 p**

Subiecte selectate și propuse de către
Prof. POP OVIDIU-FLORIN

Sighetu Marmației, Mihai Viteazu 14, Maramureș 435500
Tel. 0786813070, Email: cndv.sighet@gmail.com,
Web: www.cndv.ro