Colegiul Naţional Gheorghe Şincai, Baia Mare

Concursul interjudeţean de matematică ARGUMENT

Ediţia a 14-a, Ianuarie 2025

Soluţii - Clasa a 12-a

Problema 1. Determinaţi mulţimile finite de numere reale M, cu cel puţin două elemente, care au proprietatea că operaţia $x \circ y = |x-y|$, pentru orice $x, y \in M$, este o lege de compoziţie pe M.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. Pentru $x = y$, obţinem $0 \in M$. Fie $s = \min M$ şi $t = \max M$. Atunci $t \geq 0$. Dacă $s < 0$, atunci $|t-s| = t - s > t$, absurd. Deducem că $0 = \min M$.

Fie $n = |M|$ şi $a = \min\{x \in M | x > 0\}$. Dacă $n = 2$, avem mulţimile de forma $M = \{0, a\}$, unde $a > 0$. Presupunem $n \geq 3$. Atunci elementele lui M sunt $a_1 = 0 < a_2 = a < a_3 < \ldots < a_n = t$. Dar şi $t > t - a > t - a_3 > \ldots > 0$ sunt elemente în M, deci $a_{n-1} = t - a$. Arătăm prin inducţie după $k = 1, 2, \ldots, n-1$ că $a_{n-k} = t - ka$, cazul $k = 1$ este demonstrat.

Presupunem că $a_{n-k} = t - ka$. Atunci numerele $0 < a_{n-k} - a_{n-(k+1)} < a_{n-k} - a_{n-(k+2)} < \ldots < a_{n-k} - a_{n-k-(n-k-1)} = a_{n-k}$, în număr de $n-k$, sunt toate elemente din M cel mult egale cu a_{n-k}, deci $a_{n-k} - a_{n-k-1} = a$, de unde $a_{n-k-1} = t - (k+1)a$.

Atunci elementele lui M sunt în progresie aritmetică, deci $M = \{0, a, 2a, \ldots, (n-1)a\}$, unde $a > 0$ şi $n \geq 2$.

Problema 2. Determinaţi funcţiile continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu proprietatea că există un şir $(a_n)_{n\geq 1}$ de numere reale strict pozitive, convergent la 0, pentru care

$$f(x) = \frac{F(x+a_n) - F(x)}{a_n} - a_n, \text{ pentru orice } n \geq 1 \text{ şi } x \in \mathbb{R},$$

unde F este o primitivă a funcţiei f.

Cristi Săvescu, Cluj Napoca

Soluţie. Întrucât f este continuă, primitiva sa F este derivabilă şi avem $F' = f$. Fixăm $n \geq 1$. Atunci, relaţia dată ne arată că şi f este derivabilă şi derivând, obţinem $f'(x) = \dfrac{f(x+a_n) - f(x)}{a_n}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Atunci, cum $n \geq 1$ a fost ales aleator, avem $f'(x) = \dfrac{f(x+a_n) - f(x)}{a_n}$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi orice $n \geq 1$ (1).

Din teorema lui Lagrange, deducem că pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi $n \geq 1$, există $b_n \in (x, x+a_n)$ pentru care $f'(x) = f'(b_n)$ (2). Relaţia (1) ne arată că şi f' este derivabilă şi din teorema lui Rolle, din (2) deducem că există $c_n \in (x, b_n)$ pentru care $f''(c_n) = 0$ (3). Derivând în (1), obţinem $f''(x) = \dfrac{f'(x+a_n) - f'(x)}{a_n}$, deci f'' este o funcţie derivabilă, în particular continuă. Atunci, în (3), dacă facem $n \to \infty$, avem $f''(x) = 0$. Aşadar, $f'' = 0$. Atunci $f'(x) = b$ şi $f(x) = ax + b$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

Revenind în relaţia din ipoteză, obţinem $a = 2$ şi observăm că orice funcţie de forma $f(x) = 2x + b$, unde $b \in \mathbb{R}$ verifică.

Problema 3. Pentru orice număr natural nenul n notăm cu D_n mulţimea divizorilor săi naturali şi definim legea de compoziţie $x \circ y = \frac{[x,y]}{(x,y)}$, pentru orice $x, y \in D_n$.

a) Determinaţi mulţimea $M = \{n \in \mathbb{N}^* | (D_n, \circ) \text{ este grup}\}$.
b) Fie $n \in M$. Arătaţi că dacă $a, b \in \mathbb{Z}$ şi $n | a^n - b^n$, atunci $n^2 | a^n - b^n$.

Vasile Pop, Cluj Napoca

Soluţie. a) Presupunem că există p prim cu $p|n$ pentru care $p^2|n$. Atunci, întrucât $(D_n, \circ)$ este grup, legea $\circ$ este asociativă. Dar $p, p^2 \in D_n$ iar $(p \circ p) \circ p^2 = 1 \circ p^2 = p^2$ în timp ce $p \circ (p \circ p^2) = p \circ p = 1$. Deducem că n trebuie să fie liber de pătrate.

Reciproc, dacă $n = p_1 p_2 \dots p_k$, unde $p_1, p_2, \dots, p_k$ sunt numere prime distincte, atunci orice $t \in D_n$ se scrie sub forma $t = \prod\limits_{i \in I_t \subset \{1,2,\dots,k\}} p_i$. Atunci avem $t \circ s = \prod\limits_{i \in I_t \Delta I_s} p_i$.

Evident $1 \in D_n$ este element neutru iar $x \circ x = 1$, deci $x^{-1} = x$, pentru orice $x \in D_n$. Deducem că $(D_n, \circ)$ este grup, izomorf cu $(\mathcal{P}(\{p_1, p_2, \dots, p_k\}), \Delta)$, unde $\mathcal{P}(X)$ este mulţimea părţilor lui X şi Δ este diferenţa simetrică $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

b) Fie $n \in M$ şi p prim cu $p|n$. Atunci avem $n = pq$, unde $(p, q) = 1$ şi, din ipoteză, avem $p | a^n - b^n = (a^p)^q - (b^p)^q$. Din mica teoremă a lui Fermat, avem $a^p \equiv a(\bmod p)$, deci $p | a^q - b^q$, adică $a^q = px + b^q$. Deducem că $a^n = (a^q)^p = (px + b^q)^p = b^n + p^2 x \cdot b^q + p^2 \cdot \alpha$, deci $p^2 | a^n - b^n$. Cum această relaţie are loc pentru orice p prim cu $p|n$, avem $n^2 | a^n - b^n$.

Problema 4. Determinaţi funcţiile $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ care admit primitive şi care verifică

$$f(x) = \sqrt{2} \cdot F(x) + F(1-x) \text{ pentru orice } x \in \mathbb{R},$$

unde F este o primitivă a funcţiei f.

Dorian Popa, Cluj Napoca

Soluţie 1. Scriem relaţia dată sub forma $F'(x) = \sqrt{2} \cdot F(x) + F(1-x)$ (1) şi deducem că F' este derivabilă. Atunci, derivând în (1), obţinem $F''(x) = \sqrt{2} \cdot F'(x) - F'(1-x)$.

Înlocuind în (1) pe x cu $1-x$, avem $F'(1-x) = \sqrt{2} \cdot F(1-x) + F(x)$. Atunci, avem $F''(x) = \sqrt{2} \cdot F'(x) - \sqrt{2} \cdot F(1-x) - F(x)$. Dar din (1) avem $F(1-x) = F'(x) - \sqrt{2} \cdot F(x)$, deci $F''(x) = F(x)$, care se rescrie $F''(x) - F'(x) + F'(x) - F(x) = 0$.

Considerăm $g(x) = F'(x) - F(x)$. Atunci avem $g'(x) + g(x) = 0$, deci $(g(x)e^x)' = 0$ şi atunci avem $g(x) = \frac{k}{e^x}$. Atunci $F'(x) - F(x) = \frac{k}{e^x}$, deci $(F(x)e^{-x})' = \frac{k}{e^{2x}}$, deci $F(x) = ae^x + \frac{b}{e^x}$.

Înlocuind în (1), obţinem $b = a(1 - \sqrt{2})e$, deci $F(x) = a(e^x + (1 - \sqrt{2})e^{1-x})$. Atunci $f(x) = a(e^x + (\sqrt{2} - 1)e^{1-x})$, unde $a \in \mathbb{R}$.

Soluţie 2. De la $F'' = F$, putem continua astfel: Cum $F' = f$ şi $f' = F$, avem $(F + f)' = F + f$, deci dacă notăm cu $h = F + f$, avem $h' = h$, deci $(he^{-x})' = 0$. Atunci $h(x) = c \cdot e^x$ şi avem $(F \cdot e^x)' = c \cdot e^{2x}$, de unde $F(x) = \frac{c}{2} \cdot e^x + k \cdot e^{-x}$ şi apoi $f(x) = \frac{c}{2} \cdot e^x - k \cdot e^{-x}$. Înlocuind în relaţia dată, obţinem $f(x) = a(e^x + (\sqrt{2} - 1)e^{1-x})$.