UNIVERSITATEA TEHNICĂ
DIN CLUJ-NAPOCA

Concursul de Matematică - Informatică

organizat de către

Departamentul de Matematică şi Informatică, Facultatea de Ştiinţe,
Centrul Universitar Nord din Baia Mare, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca

24 Mai 2025
clasa a XII-a

Toate subiectele sunt obligatorii. Pentru fiecare subiect este necesară rezolvarea completă.
Se acordă din oficiu **10 puncte**. Timp de lucru **trei ore!**

Subiectul I – 30 puncte

1.) Suma primilor șapte termeni ai unei progresii aritmetice este 7. Determinați cel de al patrulea termen al acestei progresii.

2.) Fie $m \in \mathbb{R}$ şi ecuaţia $4x^2 + 4mx + m^2 - 1 = 0$, cu rădăcinile reale x_1 şi x_2. Determinaţi valoarea diferenţei $d = 1 - |x_1 - x_2|$.

3.) Pe o masă sunt aşezate trei penare. Determinați în câte moduri se pot așeza 6 stilouri în cele 3 penare, câte două stilouri în fiecare penar.

4.) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x + 2 \cdot 3^{1-x} = 5$.

5.) Aflaţi numărul real a pentru care vectorii $\overrightarrow{u}$ şi $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ au acelaşi modul, unde $\overrightarrow{u} = -2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ şi $\overrightarrow{v} = (a+1)\overrightarrow{i} - (a-3)\overrightarrow{j}$.

6.) Arătaţi că $f : \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 - \cos x} + \dfrac{\sin^2 x}{1 + \cos x}$ este o funcţie constantă.

Subiectul II – 30 puncte

1. Fie $a \in \mathbb{Z}$ un număr întreg şi sistemul de ecuaţii

$$\begin{cases} 2x - 5y + 4z = 0 \\ -3x + y + z = -1 \\ 2x - z = a \end{cases}$$

a) Arătaţi că dacă $(x_0, 26, 24)$ este o soluţie a sistemului dat, atunci $a = 10$.

b) Pentru $a = 5$ rezolvaţi sistemul de ecuaţii.

c) Determinaţi valoarea numărului întreg $a \in \mathbb{Z}$ pentru care $x_0 + y_0 + z_0 + 13a = 2025 - \dfrac{a}{10}$, unde (x_0, y_0, z_0) este o soluţie a sistemului dat.

2. Pe mulţimea $G = [0, 1)$ se defineşte legea de compoziţie $* : G \times G \to G$, cu $x * y = \{x + y\}$ oricare ar fi $x, y \in G$, unde prin $\{a\}$ s-a notat partea fracţionară a numărului real a. Se ştie că perechea $(G, *)$ este un grup abelian.

a) Calculaţi $\dfrac{2}{3} * \dfrac{7}{12}$.

b) Determinaţi numărul natural nenul n pentru care are loc egalitatea $\dfrac{2}{5} * \dfrac{3}{7} * \dfrac{n}{2025} * \dfrac{3}{5} * \dfrac{4}{7} = \dfrac{1}{n}$.

c) Determinaţi $x \in G$ pentru care $x * x * x = \dfrac{1}{2}$.

Subiectul III – 30 puncte

1. Fie funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$.

a) Arătaţi că derivata funcţiei f este $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + x + 1)^2}$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.

b) Determinaţi abscisele punctelor situate pe graficul funcţiei f pentru care dreapta tangentă la graficul funcţiei f este perpendiculară pe axa Oy.

c) Arătaţi că

$$-1 \le f\left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) + f\left(\sin\frac{4\pi}{3}\right) \le \frac{1}{3}.$$

2. Fie funcţia $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 3x + 2}$.

a) Calculaţi $\displaystyle\int_0^1 (x + 2) f(x)\, dx$.

b) Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \ln\frac{4}{3}$.

c) Arătaţi că $\displaystyle\int_0^1 \frac{x + 2 - (x + 1)\ln(x + 1)}{(x + 1)(x + 2)^2}\, dx = \frac{\ln 2}{3}$.