Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Subiect
Clasa a VIII - a

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Se acordă 10 puncte din oficiu.
Scrieți rezolvările complete.

Problema 1. **(22,5 puncte)**

a) Arătați că dacă a și b sunt numere întregi cu $\left|a-b^2\right|+a^2+a=0$, atunci $a=b=0$.

b) Determinați perechile de numere întregi (x, y) pentru care are loc egalitatea:

$$\left|y^2+8y+16-x-3\right|+x^2+6x+9+x=-3.$$

Problema 2. **(22,5 puncte)**

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și M, N, P, Q mijloacele muchiilor BC, AD, CC', respectiv DD'. Notăm $AM \cap BD=\{E\}$, $CN \cap BD=\{F\}$, $DP \cap CD'=\{E'\}$ și $C'Q \cap CD'=\{F'\}$.

a) Dacă $BP=2\sqrt{5}$ cm, calculați lungimea diagonalei $A'C$ a cubului.

b) Demonstrați că $EE' \parallel (BCC')$.

c) Calculați sinusul unghiului determinat de dreptele EE' și FF'.

Problema 3. **(22,5 puncte)**

Determinați valorile numărului întreg x pentru care are loc egalitatea

$$\frac{26-x}{15}=\left\{\frac{10x+3}{15}\right\}+\left\{\frac{10x+53}{15}\right\},$$

unde $\{\alpha\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real α.

Problema 4. **(22,5 puncte)**

Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și planele paralele α și β, astfel încât planul α intersectează muchiile BC, BD, AD și AC în punctele E, F, G, respectiv H, iar planul β intersectează muchiile BC, BD, AD și AC în punctele M, N, P, respectiv Q. Dacă $E \in [BM]$, $BE=AG$ și $\frac{AG}{CM}=\frac{GP}{EM}=\frac{PD}{EB}$, demonstrați că:

a) $CQ=AH$;

b) $MQ \perp EF$.