Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Subiect
Clasa a IX - a

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Scrieți rezolvările complete.

Problema 1. **(22,5 puncte)**

a) Arătați că $\left(x^2+y^2+1\right)\left(z^2+2\right)\geq(x+y+z)^2$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $\dfrac{1}{a^2+b^2+1}+\dfrac{1}{b^2+c^2+1}+\dfrac{1}{c^2+a^2+1}\geq 1$. Arătați că $ab+bc+ca\leq 3$.

Problema 2. **(22,5 puncte)**

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left|ax^2+bx+c\right|\leq 1$, $\forall x\in[-1,1]$.

a) Arătați că $|a+c|\leq 1$.

b) Arătați că $a^2+b^2+c^2\leq 5$.

Problema 3. **(22,5 puncte)**

Fie $a,b\in\mathbb{N}$ și $A=\left\{n\in\mathbb{N}\,\middle|\,\left[\sqrt{(n+a)(n+b)}\right]=n+a\right\}$.

Arătați că A este infinită dacă și numai dacă $b\in\{a,a+1,a+2\}$.

(Prin $[x]$ înțelegem partea întreagă a numărului real x).

Problema 4. **(22,5 puncte)**

În triunghiul ascuțitunghic ABC, înscris în cercul de centru O, se notează cu E și F picioarele înălțimilor duse din B, respectiv C. Arătați că $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OA}$ dacă și numai dacă $m(\sphericalangle BAC)=45^0$.