Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Subiect
Clasa a X - a

Toate subiectele sunt obligatorii.
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
Se acordă 10 puncte din oficiu.
Scrieți rezolvările complete.

Problema 1. **(22,5 puncte)**

a) Arătați că $\sqrt[3]{26-a\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+a\sqrt{3}}=4$ dacă și numai dacă $a\in\{-15,15\}$.

b) Se consideră numerele $a,b\in(1,\infty)$. Arătați că

$$\log_a\left(\frac{a+b}{2}\right)\log_b\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq 1.$$

Problema 2. **(22,5 puncte)**

Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ o funcție astfel încât $f\big(f(n)\big)=4n+3$ pentru orice *n* număr natural.

a) Arătați că funcția f este injectivă și nu este surjectivă.

b) Arătați că există o infinitate de funcții $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, astfel încât $f\circ g=g\circ f$.

Problema 3. **(22,5 puncte)**

Determinați funcțiile $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ cu proprietatea că

$$f(x)f(y)-f(xy)=\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\text{ pentru orice } x,y>0.$$

Problema 4. **(22,5 puncte)**

Fie punctele A_1 și A_2 de afixe z_1, respectiv z_2, unde $z_1,z_2\in\mathbb{C}^*$.

a) Arătați că punctele A_1, A_2 și M sunt coliniare, unde M este de afix $w=\lambda\cdot z_1+(1-\lambda)\cdot z_2$, cu $\lambda\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că

$$2\cdot|z_1|\cdot|z_2|\cdot|z_1+z_2|\geq(|z_1|+|z_2|)\cdot|z_1\cdot|z_2|+|z_1|\cdot z_2|.$$