Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Subiect
Clasa a XI - a

Toate subiectele sunt obligatorii. **Se acordă 10 puncte din oficiu.**
Timpul de lucru efectiv este de 3 ore. **Scrieți rezolvările complete.**

Problema 1. **(22,5 puncte)**

Fie $z \in \mathbb{C}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & z+i & 2z \\ z+i & z^2+2iz-1 & 2z^2+2iz \\ -i & 1-iz & -2iz \end{pmatrix}$, respectiv $X(a) = I_3 + a \cdot A$, cu $a \in \mathbb{C}$. Calculați $\left(X(a)\right)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Problema 2. **(22,5 puncte)**

Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C}), A \neq O_2$. Știind că $A^2 = O_2$, arătați că $AB + BA = O_2$ dacă și numai dacă $Tr(B) = Tr(AB) = 0$.

Problema 3. **(22,5 puncte)**

Fie $a \in \mathbb{R}$ un număr real și funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \begin{cases} x\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{x}\right\}\right), x \neq 0 \\ a, x = 0 \end{cases}$, unde prin $\{\alpha\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real α.

a) Determinați valoarea numărului real a pentru care $\lim_{x \to 0} f(x) = a$.

b) Arătați că există o infinitate de numere reale $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pentru care nu există $\lim_{x \to x_0} f(x)$.

Problema 4. **(22,5 puncte)**

Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $x_0 = \sqrt{2}$, definit prin relația de recurență $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Studiați convergența șirului $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) Calculați

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^n \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{x_{n+1}}.$$