Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Barem de corectare și notare
Clasa a VI- a

Problema 1. **(22,5 puncte)**

Fie M_{11} mulțimea tuturor multiplilor numărului 11 și mulțimile

$$B = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} + \overline{zx0} + \overline{zyx} + 2 \cdot \overline{zy} \in M_{11}\} \text{ și } A = \{a \mid a = x + y + z,\ \overline{xyz} \in B\}.$$

a) Arătați că $853 \in B$ și $953 \notin B$.
b) Determinați suma tuturor numerelor care sunt elemente ale mulțimii A.

Soluție:
a) Pentru 853 avem

$$\overline{xyz} + \overline{zx0} + \overline{zyx} + 2 \cdot \overline{zy} = 853 + 380 + 358 + 2 \cdot 35 = 1661 = 11 \cdot 151 \in M_{11}$$

deci $853 \in B$ **6p**
Pentru 953 avem

$$\overline{xyz} + \overline{zx0} + \overline{zyx} + 2 \cdot \overline{zy} = 953 + 390 + 359 + 2 \cdot 35 = 1772 = 11 \cdot 161 + 1 \notin M_{11}$$

deci $953 \notin B$ **6p**
b) Avem

$$\overline{xyz} + \overline{zx0} + \overline{zyx} + 2 \cdot \overline{zy} = 111 \cdot x + 22 \cdot y + 221 \cdot z = 11(10x + 2y + 20z) + x + z$$

Se deduce că

$$\overline{xyz} + \overline{zx0} + \overline{zyx} + 2 \cdot \overline{zy} \in M_{11} \text{ dacă } x + z = 11$$ **3,5p**

Cum $x + z = 11$ și $y \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ se obține

$$A = \{11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$$ **3,5p**

Suma elementelor mulțimii A este

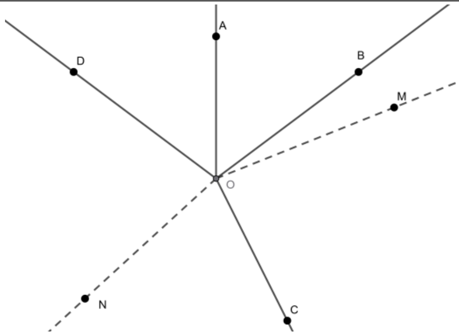
$$S = 155$$ **3,5p**

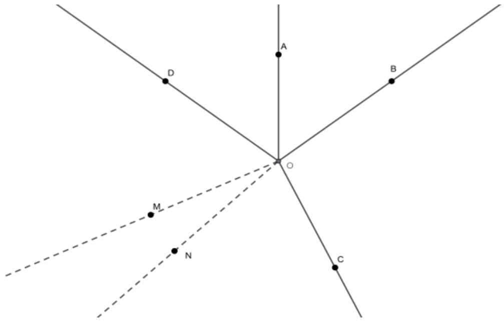
Problema 2. **(22,5 puncte)**

Se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOA$, formate în jurul unui punct. Se știe că $(OA$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle BOD$, $\frac{\sphericalangle COD}{\sphericalangle AOB} = \frac{7}{3}$ și $\sphericalangle AOD = 60\%$ din $\sphericalangle BOC$.

a) Determinați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOA$.
b) Se construiesc semidreptele $(OM$ și $(ON$ astfel încât $OM \perp OC$ și $(ON$ să fie bisectoarea unghiului $\sphericalangle DOC$. Determinați măsura unghiului $\sphericalangle MON$.

Soluție:
a) Avem (OA bisectoarea $\sphericalangle BOD \Leftrightarrow \sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD = x^0$
Obținem:
$\frac{\sphericalangle COD}{\sphericalangle AOB} = \frac{7}{3} \Leftrightarrow \sphericalangle COD = \frac{7}{3}\sphericalangle AOB = \frac{7}{3}x$ **3p**
$\sphericalangle AOD = 60\%$ din $\sphericalangle BOC \Leftrightarrow \sphericalangle BOC = \frac{5}{3}x$ **3p**
Cum unghiurile $\sphericalangle AOB, \sphericalangle BOC, \sphericalangle COD$ și $\sphericalangle DOA$ sunt formate în jurul unui punct avem
$x + \frac{5x}{3} + \frac{7x}{3} + x = 360^0$, de unde $x = 60^0$ **3p**
Obținem $\sphericalangle AOB = \sphericalangle AOD = 60^0, \sphericalangle BOC = 100^0, \sphericalangle COD = 140^0$ **3p**
b)
$(ON$ bisectoarea $\sphericalangle COD \Leftrightarrow \sphericalangle CON = \sphericalangle NOD = 70^0$ **3,5p**
Cazul I: dacă $(OM \in Int\ \sphericalangle BOC$
$\sphericalangle MON = \sphericalangle MOC + \sphericalangle CON = 90^0 + 70^0 = 160^0$ **3,5p**





Cazul II: dacă $(OM \in Int\sphericalangle COD$
$\sphericalangle MON = \sphericalangle MOC - \sphericalangle CON = 90^0 - 70^0 = 20^0$.. **3,5p**

Problema 3. **(22,5 puncte)**
Fie p un număr prim astfel încât $A = p(p + 2025)$ este pătrat perfect. Determinați valorile lui p.
Supliment Gazeta Matematică nr 9/2025

Soluţie:
$p(p + 2025)$ este pătrat perfect $\Rightarrow \left.\begin{matrix} p(p+2025) = x^2 \\ p \ prim \end{matrix}\right\} \Rightarrow p \mid x \Rightarrow x = p \cdot k$, cu k număr natural
$\Rightarrow p(p + 2025) = p^2 \cdot k^2 \Rightarrow p + 2025 = p \cdot k^2 \Rightarrow p(k^2 - 1) = 2025 = 3^4 \cdot 5^2 \Rightarrow p \in \{3,5\}$............... **12p**
Pentru:
$p = 3 \Rightarrow k^2 - 1 = 3^3 \cdot 5^2 = 27 \cdot 25 \Rightarrow k^2 = 676 \Rightarrow k = 26$ **3,5p**
$p = 5 \Rightarrow k^2 - 1 = 3^4 \cdot 5 \Rightarrow k^2 = 406 = M_4 + 2$ ≠pătrat perfect. **3,5p**
Finalizare $p = 3$ **3,5p**

Problema 4. **(22,5 puncte)**
Se consideră numerele naturale $x = 5n + 8$; $y = 3n + 5$ și $z = n + 2$, unde $n \in \mathbb{N}$.
a) Arătați că numerele x și y sunt prime între ele;
b) Demonstrați că numărul $\frac{1}{2} \cdot ([x; y] + [y; z])$ este pătrat perfect (unde $[a; b]$ reprezintă cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b).

Soluţie:
a) Fie numărul d astfel încât $d|x$ și $d|y$
Avem $d|5n + 8$ și $d|3n + 5$ **3p**
de unde: $d|15n + 24$ și $d|15n + 25$...**3p**
Rezultă că $d|\big((15n + 25) - (15n + 24)\big)$ de unde $d|1$...**3p**

În concluzie, numerele x și y sunt prime între ele. **1p**

b) $(x, y) = 1 \Rightarrow [x, y] = x \cdot y$ **1,5p**
În mod analog, se demonstrează că y și z sunt prime între ele
rezultă că $[y, z] = y \cdot z$...**3p**
Avem:
$$\frac{1}{2} \cdot ([x; y] + [y; z]) = \frac{1}{2} \cdot (x \cdot y + y \cdot z) = \frac{1}{2} \cdot \big((5n + 8) \cdot (3n + 5) + (3n + 5) \cdot (n + 2)\big) =$$
$= \frac{1}{2} \cdot (3n + 5) \cdot (5n + 8 + n + 2) =$..**3p**

$= \frac{1}{2} \cdot (3n + 5) \cdot (6n + 10) = (3n + 5)^2$...**3p**
În concluzie, numărul $\frac{1}{2} \cdot ([x; y] + [y; z]) = (3n + 5)^2$ este pătrat perfect, $n \in \mathbb{N}$. **2p**

Se acordă 10 puncte din oficiu.