Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Barem de corectare și notare
Clasa a VII-a

Problema 1. **(22,5 puncte)**

a) Arătați că $|4-\sqrt{3}|+|4-2\sqrt{3}|+|4-3\sqrt{3}| \in \mathbb{N}$.

b) Arătați că pentru orice număr rațional $x \in \mathbb{Q}$ numărul $A=|x-\sqrt{3}|+|x-2\sqrt{3}|+\cdots+|x-2026\sqrt{3}|$ nu este rațional.

Soluție:

a)

$|4-\sqrt{3}|+|4-2\sqrt{3}|+|4-3\sqrt{3}|=4-\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}+3\sqrt{3}-4=4\in\mathbb{N}$………….. 10,5 puncte

b) Notăm $|x-k\sqrt{3}|=\alpha_k(x-k\sqrt{3})$, unde $\alpha_k=\pm1$, atunci:

$A=(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2026})x-\sqrt{3}(\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2026\alpha_{2026})$…………………. . 3 puncte

Presupunem că $A\in\mathbb{Q}$. Din $(\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{2026})x\in\mathbb{Q}$, avem:

$(\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+2026\alpha_{2026})=0$…………………………………………………... 3 puncte

$(\alpha_1+3\alpha_3+\cdots+2025\alpha_{2025})+(2\alpha_2+\cdots+2026\alpha_{2026})=0$

Rezultă că suma $(\alpha_1+3\alpha_3+\cdots+2025\alpha_{2025})$ este un număr par…………………………..3 puncte

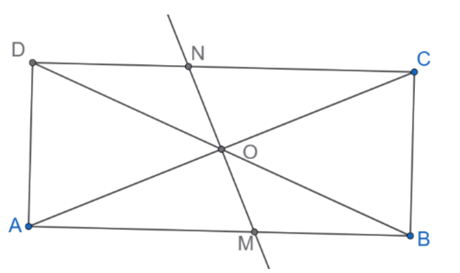
Cum $\alpha_k=\pm1$, suma a 1013 numere impare este un număr par, fals, deci $A\notin\mathbb{Q}$……………..3 puncte

Problema 2. **(22,5 puncte)**

În dreptunghiul $ABCD$, cu $AC\cap BD=\{O\}$, mediatoarea segmentului AC intersectează dreapta AB în punctul M și dreapta CD în punctul N.

a) Arătați că $\Delta OND\equiv\Delta OMB$;
b) Știind că $MN=8cm$ și $\sphericalangle ACB=60^\circ$, aflați perimetrul patrulaterului $AMCN$.

Soluție:



a) $DO=BO$ (O este mijlocul lui (DB)) (1)

$\sphericalangle NOD\equiv\sphericalangle MOB$ (opuse la vârf) (2)

$\sphericalangle ODN\equiv\sphericalangle OBM$

(unghiuri alterne interne pentru $DC\parallel AB$, secanta $D-O-B$ (3)

Din (1), (2), (3) rezultă, pe baza cazului (ULU), că

$\Delta OND\equiv\Delta OMB$ …………………………………… 13,5 puncte

b) $MN\perp AC,\ AO=CO,\ NO=MO\ \Rightarrow AMCN$ romb……………………...……………. 3 puncte

$\Delta ABC, \sphericalangle B=90^\circ, \sphericalangle BAC=30^\circ$

$\Delta AMN, \sphericalangle AMN=60^\circ, AM=AN\Rightarrow AM=AN=MN=8$ cm……………….……….. 3 puncte

$P_{AMCN}=4\cdot8=32$cm…………………………………………………………… 3 puncte

Problema 3. **(22,5 puncte)**

Aflați $n \in \mathbb{N}$, pentru care $A = \sqrt{n+2028} + \sqrt{n-2028}$ este număr natural pătrat perfect.

G.M.10/2025

Soluție:

Notăm $a = \sqrt{n+2028}$ și $b = \sqrt{n-2028}$.

$a^2 - b^2 = 4056 \Rightarrow (a-b)(a+b) = 4056$ .... 3 puncte

$A = a + b = k^2, k \in \mathbb{N} \Rightarrow (a-b)k^2 = 2^3 \cdot 3 \cdot 13^2$, deci $k^2 \in \{1^2, 2^2, 13^2, 26^2\}$

$k^2 = a + b \geq a - b$.. ....4,5 puncte

Pentru $k^2 = 1$ se obține $a - b = 4056$, fals.. 3 puncte

Pentru $k^2 = 4$ se obține $a - b = 6 \cdot 13^2$, fals.. 3 puncte

Pentru $k^2 = 13^2$ se obține $a - b = 24, a + b = 169 \Rightarrow 2a = 193$, fals..................... 3 puncte

Pentru $k^2 = 26^2$ se obține $a - b = 6, a + b = 676$, deci $a = 341, b = 335$............ 3 puncte

$n = b^2 + 2028 = 114253$ .... 3 puncte

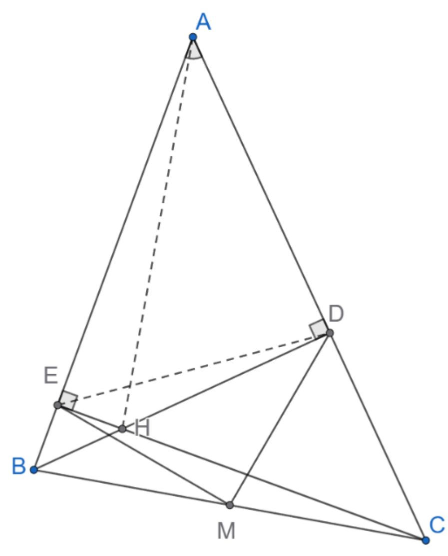
Problema 4. **(22,5 puncte)**

Fie triunghiul ascuțitunghic ABC, cu $\sphericalangle BAC = 45°$, $BD \perp AC$, $CE \perp AB$, $D \in (AC)$, $E \in (AB)$ și M mijlocul laturii (BC).

a) Aflați măsura unghiului EMD;

b) Dacă $BD \cap CE = \{H\}$, arătați că $AH > ED$.

Soluție:



a) $EM = DM = \frac{BC}{2}$ .... 6 puncte

$\sphericalangle EMB = 180^\circ - 2B$; $\sphericalangle DMC = 180^\circ - 2C$ .... 6 puncte

$\sphericalangle EMD = 180^\circ - \sphericalangle EMB - \sphericalangle DMC = 2B + 2C - 180^\circ = 90^\circ$ 4 puncte

b) Patrulaterul $AEHD$ este inscriptibil .... 3 puncte

În cercul circumscris patrulaterului $AEHD$, AH este diametru, iar ED este coardă, care nu poate fi diametru, rezultă că $AH > ED$ .... 3,5 puncte

Se acordă 10 puncte din oficiu.