Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026
Barem de corectare și notare
Clasa a VIII - a

Problema 1. **(22,5 puncte)**

a) Arătați că dacă a și b sunt numere întregi cu $\left|a-b^2\right|+a^2+a=0$, atunci $a=b=0$.

b) Determinați perechile de numere întregi (x, y) pentru care are loc egalitatea:

$$\left|y^2+8y+16-x-3\right|+x^2+6x+9+x=-3.$$

Monica Dragoș

Soluție: a) Dacă $\left|a-b^2\right|\geq 1$, atunci $\left|a-b^2\right|+a^2+a\geq a^2+a+1>0$, fals. **3,5p**

Rezultă că $\left|a-b^2\right|=0$, deci $a=b^2\geq 0$, iar egalitatea din enunț devine $a^2+a=0$, așadar $a\in\{-1, 0\}$ **3,5p**

Deoarece $a\geq 0$, obținem soluția $a=b=0$. **3,5p**

b) Ecuația se rescrie: $\left|(y+4)^2-(x+3)\right|+(x+3)^2+(x+3)=0$ **6p**

Notăm $a=x+3$ și $b=y+4$. Ecuația devine $\left|b^2-a\right|+a^2+a=0 \Leftrightarrow \left|a-b^2\right|+a^2+a=0$. **3p**

Deoarece $a, b\in\mathbb{Z}$, din **a)** rezultă că $a=b=0$, deci $x+3=y+4=0$, așadar $(x, y)=(-3,-4)$. **3p**

Problema 2. **(22,5 puncte)**

Fie $ABCDA'B'C'D'$ un cub și M, N, P, Q mijloacele muchiilor BC, AD, CC', respectiv DD'. Notăm $AM\cap BD=\{E\}$, $CN\cap BD=\{F\}$, $DP\cap CD'=\{E'\}$ și $C'Q\cap CD'=\{F'\}$.

a) Dacă $BP=2\sqrt{5}$ cm, calculați lungimea diagonalei $A'C$ a cubului.

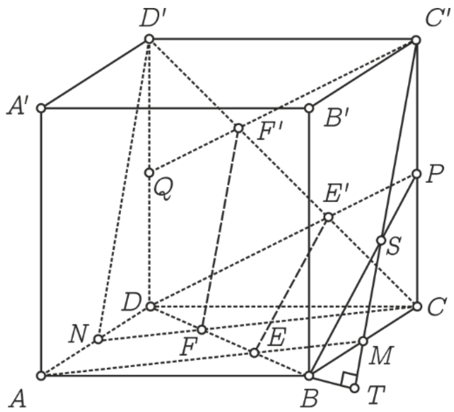
b) Demonstrați că $EE' \parallel (BCC')$.

c) Calculați sinusul unghiului determinat de dreptele EE' și FF'.

SGM 11/2025, Traian Preda (enunț modificat)

Soluție: a) Fie $BC=a$. Cu teorema lui Pitagora în ΔBCP obținem $BP=\frac{a\sqrt{5}}{2}=2\sqrt{5}$ cm,

deci $a=4$ cm și $A'C=a\sqrt{3}=4\sqrt{3}$ cm. **7,5p**



b) $\Delta DD'E' \sim \Delta PCE'$ (U.U.), deci $\frac{DE'}{E'P}=\frac{DD'}{CP}=2$. **3p**

$\Delta ADE \sim \Delta MBE$ (U.U.), deci $\frac{DE}{EB}=\frac{AD}{BM}=2=\frac{DE'}{E'P}$, așadar $EE' \parallel BP$

Cum $BP\subset (BCC')$, obținem că $EE' \parallel (BCC')$. **3p**

c) Analog cu soluția de la **b)** rezultă că $FF' \parallel D'N$. Deoarece $MND'C'$ este paralelogram, deducem că $MC' \parallel D'N$, deci $FF' \parallel MC'$. Așadar $\sphericalangle(EE', FF')=\sphericalangle(BP, MC')=\sphericalangle BSM$, unde $\{S\}=BP\cap MC'$. **3p**

Fie $T\in MC'$, cu $BT\perp MC'$. Din $\Delta BMT \sim \Delta C'MC$ (U.U.), avem $BT=\frac{CC'\cdot BM}{MC'}=\frac{a}{\sqrt{5}}$. Cum S este centrul de greutate al $\Delta BCC'$, avem $BS=\frac{2BP}{3}=\frac{a\sqrt{5}}{3}$ **3p**

și $\sin\left(\sphericalangle(EE', FF')\right)=\sin\left(\sphericalangle BSM\right)=\frac{BT}{BS}=\frac{3}{5}$ **3p**

Problema 3. **(22,5 puncte)**

Determinați valorile numărului întreg x pentru care are loc egalitatea

$$\frac{26-x}{15}=\left\{\frac{10x+3}{15}\right\}+\left\{\frac{10x+53}{15}\right\},$$

unde $\{\alpha\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real α.

Andrei Horvat-Marc

Soluție: Dacă $x=3k$, $k\in\mathbb{Z}$, atunci $\left\{\frac{10x+3}{15}\right\}+\left\{\frac{10x+53}{15}\right\}=\left\{2k+\frac{1}{5}\right\}+\left\{2k+\frac{8}{15}\right\}=\frac{1}{5}+\frac{8}{15}=\frac{11}{15}$, și obținem $\frac{26-x}{15}=\frac{11}{15}$, deci $x_1=15$. **6,5p**

Dacă $x=3k+1$, $k\in\mathbb{Z}$, atunci $\left\{\frac{10x+3}{15}\right\}+\left\{\frac{10x+53}{15}\right\}=\left\{2k+\frac{13}{15}\right\}+\left\{2k+\frac{63}{15}\right\}=\frac{16}{15}$, deci $\frac{26-x}{15}=\frac{16}{15}$, așadar $x_2=10$. **6,5p**

Dacă $x=3k+2$, $k\in\mathbb{Z}$, atunci $\left\{\frac{10x+3}{15}\right\}+\left\{\frac{10x+53}{15}\right\}=\left\{2k+\frac{23}{15}\right\}+\left\{2k+\frac{73}{15}\right\}=\frac{21}{15}$, deci $\frac{26-x}{15}=\frac{21}{15}$, așadar $x_3=5$. **6,5p**

Deoarece $x_1=3\cdot5$, $x_2=3\cdot3+1$ și $x_3=3\cdot1+2$, soluția problemei este $S=\{5,10,15\}$. **3p**

Problema 4. **(22,5 puncte)**

Fie $ABCD$ un tetraedru regulat și planele paralele α și β, astfel încât planul α intersectează muchiile BC, BD, AD și AC în punctele E,F,G, respectiv H, iar planul β intersectează muchiile BC, BD, AD și AC în punctele M,N,P, respectiv Q. Dacă $E\in[BM]$, $BE=AG$ și $\frac{AG}{CM}=\frac{GP}{EM}=\frac{PD}{EB}$, demonstrați că:

a) $CQ=AH$;

b) $MQ\perp EF$.

Dana și Cristian Heuberger

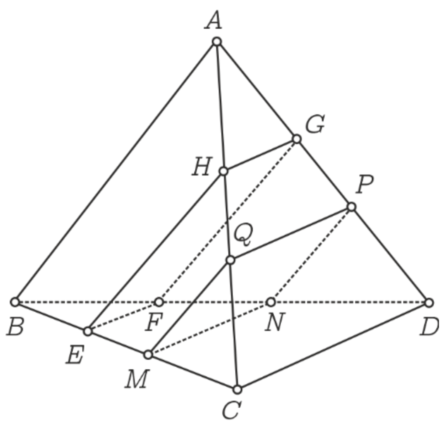
Soluție: a) $\frac{AG}{CM}=\frac{GP}{EM}=\frac{PD}{EB}=\frac{AG+GP+PD}{CM+EM+EB}=\frac{AD}{BC}=1$, deci

$PD=BE=AG=CM\overset{\text{not.}}{=}x$ și $EM=GP=a-2x$, unde $AD=a$. **6p**

$\alpha\parallel\beta$, $EH=\alpha\cap(ABC)$ și $MQ=\beta\cap(ABC)$, deci $EH\parallel MQ$.

Analog rezultă $HG\parallel QP$. Din teorema lui Thales, obținem:

$\frac{CQ}{HQ}=\frac{CM}{EM}=\frac{x}{a-2x}=\frac{AG}{GP}=\frac{AH}{HQ}$, prin urmare $CQ=AH$ **6p**



b) Fie $CQ=AH\overset{\text{not.}}{=}y$. Ca la **a)**, obținem $EF\parallel MN$, $FG\parallel NP$ și apoi $BF=DN\overset{\text{not.}}{=}z$. Cum $\frac{BE}{EM}=\frac{BF}{FN}$, deci $\frac{x}{a-2x}=\frac{z}{a-2z}$, deducem că $x=z$, așadar $EF\parallel CD$. **3p**

Analog deducem că $x=y$ și $MQ\parallel AB$. **1,5p**

Deoarece tetraedrul $ABCD$ este regulat, avem $AB\perp CD$. **3p**

Cum $MQ\parallel AB$ și $EF\parallel CD$, rezultă că $MQ\perp EF$. **3p**

Se acordă 10 puncte din oficiu.