Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Barem de corectare și notare
Clasa a IX - a

Problema 1. **(22,5 puncte)**

a) Arătați că $\left(x^2+y^2+1\right)\left(z^2+2\right)\ge(x+y+z)^2$, $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$.

b) Fie $a,b,c>0$ astfel încât $\dfrac{1}{a^2+b^2+1}+\dfrac{1}{b^2+c^2+1}+\dfrac{1}{c^2+a^2+1}\ge 1$. Arătați că $ab+bc+ca\le 3$.

Soluție:

a) $\left(x^2+y^2+1\right)\left(z^2+2\right)=\left(x^2+y^2+1\right)\left(1^2+1^2+z^2\right)\overset{C-B-S}{\ge}(x+y+z)^2$

Avem egalitate pentru $xz=yz=1$ **12p**

b) Din **a)** obținem că $\dfrac{1}{a^2+b^2+1}\le\dfrac{c^2+2}{(a+b+c)^2}$ și analoagele.

Atunci $\dfrac{1}{a^2+b^2+1}+\dfrac{1}{b^2+c^2+1}+\dfrac{1}{c^2+a^2+1}\le\dfrac{a^2+2+b^2+2+c^2+2}{(a+b+c)^2}$ **7,5p**

Utilizând ipoteza, avem:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+6}{(a+b+c)^2}\ge 1\Rightarrow a^2+b^2+c^2+6\ge a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac\Rightarrow$$

$\Rightarrow ab+bc+ac\le 3$ **3p**

Problema 2. **(22,5 puncte)**

Fie $a,b,c\in\mathbb{R}$ astfel încât $\left|ax^2+bx+c\right|\le 1,\ \forall x\in[-1,1]$.

a) Arătați că $|a+c|\le 1$.

b) Arătați că $a^2+b^2+c^2\le 5$.

Soluție:

a) În $\left|ax^2+bx+c\right|\le 1,\ \forall x\in[-1,1]$, îi dăm lui x valorile $0,1,-1$.

$x=0\Rightarrow|c|\le 1$

$x=1\Rightarrow|a+b+c|\le 1\Rightarrow -1\le a+b+c\le 1$

$x=-1\Rightarrow|a-b+c|\le 1\Rightarrow -1\le a-b+c\le 1$

.... **6p**

Prin adunarea membru cu membru a ultimelor două inegalități obținem

$-1\le a+c\le 1\Leftrightarrow|a+c|\le 1$ **4p**

b) Din $-1\le a+b+c\le 1$ și $-1\le -a+b-c\le 1\Rightarrow -2\le 2b\le 2\Rightarrow|b|\le 1$ **3p**

Dar $|a|-|c|\le|a+c|\le 1\Rightarrow|a|\le|c|+1\overset{|c|\le 1}{\le}2\Rightarrow|ac|\le 2$ **3p**

Din implicațiile $\begin{matrix}(a+b+c)^2 \le 1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac \le 1 \\ (a-b+c)^2 \le 1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2-2ab-2bc+2ac \le 1\end{matrix}$, prin adunare membru cu membru, obținem

$a^2+b^2+c^2+2ac \le 1 \Rightarrow a^2+b^2+c^2 \le 1-2ac \overset{ac\ge -2}{\le} 1+4=5$ **6,5p**

Problema 3. **(22,5 puncte)**

Fie $a,b\in\mathbb{N}$ și $A=\left\{n\in\mathbb{N}\middle|\left[\sqrt{(n+a)(n+b)}\right]=n+a\right\}$. Arătați că A este infinită dacă și numai dacă $b\in\{a,a+1,a+2\}$. (Prin $[x]$ înțelegem partea întreagă a numărului real x).

(*Gazeta Matematică* 9/2025)

Soluție:

$\left[\sqrt{(n+a)(n+b)}\right]=n+a \Leftrightarrow n+a\le\sqrt{(n+a)(n+b)}<n+a+1$

$n+a\le\sqrt{(n+a)(n+b)} \Leftrightarrow (a-b)(n+a)\le 0$ (1)

$\sqrt{(n+a)(n+b)}<n+a+1 \Leftrightarrow n(b-a-2)<a^2+2a+1-ab$ (2) **4p**

”$\Rightarrow$” Presupunem că A este infinită. Atunci inegalitățile (1) și (2) au loc pentru o infinitate de valori ale lui n

Pentru $\forall n\in\mathbb{N}^*$ din (1) obținem că $b\ge a$ **3p**

Dacă $b-a-2>0 \Rightarrow n<\dfrac{a^2+2a+1-ab}{b-a-2}$. Cum $n\in\mathbb{N}$, această inegalitate este verificată de un număr finit de valori ale lui *n*, deci acest caz nu convine **3p**

Dacă $b-a-2\le 0$, cum $a^2+2a+1-ab=a^2+1+a(2-b)\overset{2-b\ge -a}{\ge}1$, inegalitatea (2) este adevărată pentru orice număr natural *n*, pentru că membrul stâng este mai mic sau egal cu zero, iar membrul drept este strict pozitiv **3p**

Din $b\ge a$ și $b\le a+2$, cum $a,b\in\mathbb{N}\Rightarrow b\in\{a,a+1,a+2\}$ **3p**

”$\Leftarrow$” Dacă $b\in\{a,a+1,a+2\}$, atunci inegalitățile (1) și (2) sunt verificate $\forall n\in\mathbb{N}^*$, deci A este infinită. ...**6,5p**

Problema 4. **(22,5 puncte)**

În triunghiul ascuțitunghic ABC, înscris în cercul de centru O, se notează cu E și F picioarele înălțimilor din B și respectiv C. Arătați că $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OA}$ dacă și numai dacă $m(\sphericalangle BAC)=45^0$.

Soluție:

Fie H ortocentrul triunghiului ABC.

”$\Rightarrow$” Dacă $\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OA}$, atunci $\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}$, deci $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

Utilizând relația lui Sylvester $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ obținem

$\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OH}$, deci $OEHF$ este paralelogram **6p**

Din $FO\parallel HE\Rightarrow FO\perp AC$, deci FO este mediatoarea laturii AC, de unde rezultă că triunghiul FAC este dreptunghic isoscel, deci $m\ \sphericalangle BAC\ =45^0$ **6p**

”$\Leftarrow$” Dacă $m\ \sphericalangle BAC\ =45^0$, atunci triunghiurile FAC și EAB sunt dreptunghice și isoscele.

Atunci $FO\perp AC$, $EO\perp AB$, deci $FO\parallel HE$ și $EO\parallel HF$ **6p**

Obținem că $OEHF$ este paralelogram, de unde rezultă că $\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OH}$, deci

$\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\Rightarrow\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OA}\Rightarrow\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OA}$ **4,5p**

Se acordă 10 puncte din oficiu.