Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Barem de corectare și notare
Clasa a X - a

Problema 1. **(22,5 puncte)**

a) Arătați că $\sqrt[3]{26-a\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+a\sqrt{3}}=4$ dacă și numai dacă $a\in\{-15,15\}$.
b) Se consideră numerele $a,b\in(1,\infty)$. Arătați că

$$\log_a\left(\frac{a+b}{2}\right)\log_b\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq 1,$$

Soluție

a) Fie $x=\sqrt[3]{26-a\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+a\sqrt{3}}$.

Atunci $x^3=26-a\sqrt{3}+26+a\sqrt{3}+3\sqrt[3]{(26-a\sqrt{3})(26+a\sqrt{3})}\cdot x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^3=52+3\sqrt[3]{676-3a^2}\cdot x.$ (1) 6p

Dacă $x=4$ atunci relația (1) devine $64=52+12\sqrt[3]{676-3a^2}\Leftrightarrow 676-3a^2=1\Leftrightarrow a^2=225$
$a\in\{-15,15\}$. 3p
Dacă $a\in\{-15,15\}$. Din relația (1) rezultă că $x^3-3x-52=0\Leftrightarrow(x-4)(x^2+4x+13)=0$
$\Longrightarrow x=4$. 3p

b)
$\log_a\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\log_a\sqrt{ab}$, $\log_b\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\log_b\sqrt{ab}$, $\frac{a+b}{2}>1,\sqrt{ab}>1\Longrightarrow$
$\log_a\left(\frac{a+b}{2}\right)>0$, $\log_b\left(\frac{a+b}{2}\right)>0,\log_a\sqrt{ab}>0,\log_b\sqrt{ab}>0$
Înmulțind cele 2 inegalități obținem $\log_a\left(\frac{a+b}{2}\right)\log_b\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq\log_a\sqrt{ab}\log_b\sqrt{ab}$ (2)....................3p

$\log_a\sqrt{ab}\log_b\sqrt{ab}=\frac{1}{4}(1+\log_a b)(1+\log_b a)=\frac{1}{4}(2+\log_a b+\log_b a)$

$\log_a b+\log_b a\geq 2\Longrightarrow\log_a\sqrt{ab}\log_b\sqrt{ab}\geq 1$ 3p

deci, din (2) se obține

$$\log_a\left(\frac{a+b}{2}\right)\log_b\left(\frac{a+b}{2}\right)\geq 1$$

....................3p
cu egalitate pentru $a=b$. 1,5p

Problema 2. **(22,5 puncte)**

Fie $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ o funcție astfel încât $f(f(n))=4n+3$ pentru orice n număr natural.
a) Arătați că funcția f este injectivă și nu este surjectivă.
b) Arătați că există o infinitate de funcții $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, astfel încât $f\circ g=g\circ f$.

Soluție

a) Dacă $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ astfel încât $f(n_1)=f(n_2)$, atunci $f(f(n_1))=f(f(n_2))\Longrightarrow 4n_1+3=4n_2+3$
$\Longrightarrow n_1=n_2$, deci f este injectivă 6p
(soluție alternativă $f\circ f$ injectivă rezultă că f este injectivă)
Presupunem că f este surjectivă, atunci $f\circ f$ este surjectivă, deci funcția $h:\mathbb{N}\to\mathbb{N},h(n)=4n+3$ este surjectivă, contradicție cu faptul că $0\notin Im(h)$. 6p

b) Notăm $f_n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{de\ n\ ori}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
Considerăm mulțimea $A = \{f_n \mid n \in \mathbb{N}, n \geq 1\}$

$f \circ f_n = f_n \circ f$, deci toate funcțiile din mulțimea A verifică relația din enunț, pentru $g = f_n$ **3p**
Arătăm că mulțimea A are elemente distincte, deci este infinită.
Presupunem că există $f_k = f_m$, cu $k > m$. Fie $k = m + t\ , t \in \mathbb{N}, t \geq 1$. Atunci
$f_k = f_m \Longrightarrow f_{m+t}(n) = f_m(n), \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (f_m \circ f_t)(n) = f_m(n), \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f_m\big(f_t(n)\big) = f_m(n), \forall n \in \mathbb{N}$
$\xRightarrow{f_m inj} f_t(n) = n\ , \forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow f_t = 1_{\mathbb{N}} \Longrightarrow f$ bijectivă, contradicție.
$f_1, f_2, f_3, \ldots$ sunt distincte deci sunt o infinitate de funcții. **7,5p**

Problema 3. **(22,5 puncte)**
Determinați funcțiile $f: (0, \infty) \to (0, \infty)$ cu proprietatea că

$$f(x)f(y) - f(xy) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \text{ pentru orice } x, y > 0.$$

Gazeta Matematică

Soluție
Înlocuind $x = y = 1$ în relația din ipoteză obținem $f^2(1) - f(1) = 2 \Leftrightarrow f(1) \in \{2, -1\}$
Dar $f(1) > 0$, deci $f(1) = 2$ **9p**
Înlocuind $y = 1$ în relația din ipoteză obținem $f(x) \cdot f(1) - f(x) = x + \frac{1}{x}\ , \forall x > 0 \Leftrightarrow$
$f(x) = x + \frac{1}{x}\ , \forall x > 0$ **9p**
Se verifică faptul că $f(x) = x + \frac{1}{x}\ , \forall x > 0$ satisface relația din ipoteză. **4,5p**

Problema 4. **(22,5 puncte)**
Fie punctele A_1 și A_2 de afixe z_1, respectiv z_2, unde $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$.
a) Arătați că punctele A_1, A_2 și M sunt coliniare, unde M este de afix $w = \lambda \cdot z_1 + (1 - \lambda) \cdot z_2$, cu $\lambda \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că

$$2 \cdot |z_1| \cdot |z_2| \cdot |z_1 + z_2| \geq (|z_1| + |z_2|) \cdot |z_1 \cdot |z_2| + |z_1| \cdot z_2|$$

Andrei Horvat-Marc

Soluție
a) Fie z_M afixul punctului M.
Dacă $z_1 = z_2$, atunci $A_1 = A_2$ și evident punctele A_1, A_2 și M sunt coliniare. **3p**
Dacă $z_1 \neq z_2$, atunci A_1, A_2 și M sunt coliniare $\Leftrightarrow$ vectorii $\overrightarrow{A_1M}$ și $\overrightarrow{A_1A_2}$ coliniari $\Leftrightarrow$ există k număr real astfel încât $z_M - z_1 = k(z_2 - z_1) \Leftrightarrow z_M = (1 - k)z_1 + kz_2$.
Pentru $k = 1 - \lambda$ obținem $z_M = w$, deci A_1, A_2 și M sunt coliniare. **9p**
b) Fie $w_k = \frac{1}{|z_k|} \cdot z_k$, $k \in \{1,2\}$. Dacă $|z_k| = r_k$, $k \in \{1,2\}$, atunci inegalitatea din ipoteză devine

$$2r_1r_2|r_1w_1 + r_2w_2| \geq (r_1 + r_2)|r_1w_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_2w_2| = r_1r_2(r_1 + r_2)|w_1 + w_2|$$

ceea ce implică

$$\left|\frac{r_1}{r_1 + r_2}w_1 + \frac{r_2}{r_1 + r_2}w_2\right| \geq \frac{1}{2} \cdot |w_1 + w_2| \Leftrightarrow |\lambda \cdot w_1 + (1 - \lambda)w_2| \geq \frac{1}{2} \cdot |w_1 + w_2|$$

……………………..**6p**
Fie A, B, M, N afixele numerelor complexe $w_1, w_2, \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$, respectiv $\lambda \cdot w_1 + (1 - \lambda)w_2$.
Cum $|w_1| = |w_2| = 1$, avem că ΔOAB este un triunghi isoscel, cu $OA = OB = 1$
OM este mediana perpendiculară pe dreapta AB, N este un punct situat pe dreapta AB, iar inegalitatea revine la $ON \geq OM$, adevărată **3p**
deoarece ipotenuza ON ale lungimea mai mare decât lungimea catetei OM.. **1,5p**
Se acordă 10 puncte din oficiu.