Olimpiada Națională de Matematică
etapa locală – Maramureș
7 februarie 2026

Barem de corectare și notare
Clasa a XI - a

Problema 1. **(22,5 puncte)**

Fie $z \in \mathbb{C}$ și matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & z+i & 2z \\ z+i & z^2+2iz-1 & 2z^2+2iz \\ -i & 1-iz & -2iz \end{pmatrix}$, respectiv $X(a) = I_3 + a \cdot A$, cu $a \in \mathbb{C}$.

Calculați $\big(X(a)\big)^n$ pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Soluție.

Prin calcul se arată că

$A^2 = z^2 \cdot$ 4,5p

$X(a) \cdot X(b) = (I_3 + a \cdot A)(I_3 + b \cdot A) = X(a + b + ab \cdot z^2), \forall a, b \in \mathbb{C}$ 6p

I) Dacă $z = 0$, atunci $X(a) \cdot X(b) = X(a+b), \forall a, b \in \mathbb{C}$.

Cu metoda inducției matematice se demonstrează că $(X(a))^n = X(na) = I_3 + na \cdot A$. **3p**

II) Dacă $z \in \mathbb{C}*$ atunci

$$X(a) \cdot X(b) = X(a + b + ab \cdot z^2) = X\left(z^2 \cdot \left(a + \frac{1}{z^2}\right)\left(b + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{1}{z^2}\right), \forall a, b \in \mathbb{C}$$

...................3p

Prin metoda inducției matematice se demonstrează că

$$(X(a))^n = X\left(\frac{(a \cdot z^2 + 1)^n - 1}{z^2}\right) = I_3 + \frac{(a \cdot z^2 + 1)^n - 1}{z^2} \cdot A = X\left(\frac{(a \cdot z^2 + 1)^n - 1}{z^2}\right), n \in \mathbb{N}^*.$$

...................6p

Problema 2. **(22,5 puncte)**

Fie matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C}), A \neq O_2$. Știind că $A^2 = O_2$, arătați că $AB + BA = O_2$ dacă și numai dacă $Tr(B) = Tr(AB) = 0$.

Gazeta Matematică 9/2025

Soluție.

Din $A^2 = O_2$ obținem $\det(A) = 0$, ...1,5p

iar din relația lui Cayley-Hamilton se obține $Tr(A) = 0$. 3p

Fie $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}, a, b, c, d, x, y, z, t \in \mathbb{C}$.

Implicația " $\Longleftarrow$ ". Deoarece $Tr(A) = Tr(B) = 0$ avem $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$. Calculând AB, BA și folosind relația $Tr(AB) = 0$, obținem $AB + BA = O_2$. 9p

Implicația " $\Longrightarrow$ ". Din $AB + BA = O_2$ rezultă că $Tr(AB + BA) = 0$, de unde $Tr(AB) = 0$.

Din $AB + BA = O_2$, efectuând calculele obținem $b(x+t) = c(x+t) = a(x+t) = 0$, iar cum $A \neq O_2$ se obține $Tr(B) = 0$. 9p

Problema 3. **(22,5 puncte)**

Fie $a \in \mathbb{R}$ un număr real și funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \begin{cases} x\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{x}\right\}\right), x \neq 0 \\ a, x = 0 \end{cases}$, unde prin $\{\alpha\}$ s-a notat partea fracționară a numărului real α.

a) Determinați valoarea numărului real a pentru care $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a$.

b) Arătați că există o infinitate de numere reale $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pentru care nu există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.

Horvat-Marc Andrei

Soluție.

a) Avem

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left(x\left(\frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{x}\right\}\right)\right) = -\lim_{x \to 0} \left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right)$$

Cum $\left\{\frac{1}{x}\right\} \in [0,1)$ oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$, se obține

$0 \leq x\left\{\frac{1}{x}\right\} < x, \forall x > 0$, respectiv $x < x\left\{\frac{1}{x}\right\} \leq 0, \forall x < 0$. **6p**

Prin trecere la limită, când $x \to 0$, se obțin limitele laterale

$l_d(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right) = 0$ și $l_s(0) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \left(x\left\{\frac{1}{x}\right\}\right) = 0$, de unde rezultă că

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = a.$$ **6p**

b) Avem $f(x) = x\left[\frac{1}{x}\right] - 1 + \frac{x}{2}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}^*$.

Fie $n \in \mathbb{N}^*$ un număr natural fixat. Calculăm limitele laterale în $x_0 = \frac{1}{n}$.

Dacă $x > \frac{1}{n}$, atunci $\left[\frac{1}{x}\right] = n - 1$, se obține

$$l_d\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{n} \\ x > \frac{1}{n}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{n} \\ x > \frac{1}{n}}} \left(x(n-1) - 1 + \frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2n}$$ **3p**

Dacă $x < \frac{1}{n}$, atunci $\left[\frac{1}{x}\right] = n$, se obține

$$l_s\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{n} \\ x < \frac{1}{n}}} f(x) = \lim_{\substack{x \to \frac{1}{n} \\ x < \frac{1}{n}}} \left(xn - 1 + \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2n}$$ 3p

Deci $l_s\left(\frac{1}{n}\right) \neq l_d\left(\frac{1}{n}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce implică nu există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, oricare ar fi $x_0 = \frac{1}{n}$, cu $n \in \mathbb{N}^*$,

adică există o infinitate de numere reale $x_0 \in \mathbb{R}^*$ pentru care nu există $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. **4,5p**

Problema 4. **(22,5 puncte)**

Se consideră șirul de numere reale $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cu $x_0 = \sqrt{2}$, definit prin relația de recurență $x_{n+1} = 2x_n^2 - 1$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

a) Studiați convergența șirului $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

b) Calculați

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{x_{n+1}}.$$

Soluție. a) Prin inducție matematică se demonstrează că $x_n \geq \sqrt{2}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Din $x_{n+1} - x_n = (x_n - 1)(2x_n + 1) > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, rezultă că șirul $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, este strict crescător,

deci există $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in [\sqrt{2}, \infty]$. **6p**

Presupunem că limita șirului este finită, iar după trecerea la limită în relația de recurență se obține contradicția $l \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\} \cap [\sqrt{2}, \infty)$, prin urmare $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, deci șirul nu este convergent. **4,5p**

b) Din relația de recurență obținem că $\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1} = 2(x_n + 1),\ \forall n \in \mathbb{N}$. Dând valori lui n avem

$$\frac{x_{n+1} - 1}{x_0 - 1} = 2^{n+1}(x_0 + 1)(x_1 + 1) \ldots (x_n + 1), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

. . . . **3p**

Pe de altă parte, din relația de recurență avem

$$(x_1 + 1)(x_2 + 1) \ldots (x_n + 1) = 2^n(x_0x_1 \ldots x_{n-1})^2,\ \ n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

. . . . **3p**

Din relațiile (1) și (2) se obține

$$2^n \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{x_n\sqrt{x_{n+1} - 1}}{\sqrt{2}}.$$

Deci

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}{x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n\sqrt{x_{n+1} - 1}}{\sqrt{2}x_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n\sqrt{2x_n^2 - 2}}{\sqrt{2}(2x_n^2 - 1)} = \frac{1}{2}.$$

. . . . **6p**

Se acordă 10 puncte din oficiu.