**Olimpiada Națională de Matematică**
**etapa locală – Maramureș**
**7 februarie 2026**

**Barem de corectare și notare**
**Clasa a XII- a**

**Problema 1.** **(22,5 puncte)**

Pe $G=[0,1)$ definim legea $x*y=\{x+y\}$, unde $\{a\}$ este partea fracționară a numărului real $a$.

a) Demonstrați că $(G,*)$ este grup abelian.

b) Demonstrați că mulțimea $H=\left\{0,\frac{1}{2026},\frac{2}{2026},\ldots,\frac{2025}{2026}\right\}$ este subgrup a grupului $G$.

c) Rezolvați în grupul $G$ ecuația $x^2*x=\frac{1}{2}$.

*Soluție.* a) Pentru orice $x,y,z\in G$ avem $x*(y*z)=x*\{y+z\}=\{x+\{y+z\}\}=\left\{x+y+z-\underbrace{[y+z]}_{\in\mathbb{Z}}\right\}$

$=\{x+y+z\}$. Analog $(x*y)*z=\{x+y+z\}$, deci legea este asociativă. ..............................................**3p**

Deoarece $x*y=\{x+y\}=\{y+x\}=y*x,\forall x,y\in G$, legea este comutativă..................................................**3p**

Observăm că $0*x=x=x*0,\forall x\in G$, deci numărul 0 este elementul neutru al legii....................................**3p**

Atunci simetricul lui 0 este 0 și pentru $x\in(0,1)$ avem că $x*(1-x)=\{x+1-x\}=0$ și $1-x\in G$, deci $1-x$ este simetricul lui $x$, prin urmare, toate elementele din $G$ sunt simetrizabile, deci $(G,*)$ este grup abelian.........................................................................................................................................**4,5p**

b) Fie $x,y\in H\Rightarrow x=\frac{a}{2026},y=\frac{b}{2026}$ cu $a,b\in\{0,1,\ldots,2025\}$, atunci

$$x*y=\{x+y\}=\left\{\frac{a+b}{2026}\right\}=\frac{(a+b)(\operatorname{mod}2026)}{2026}\in H$$

iar dacă $x\in H\setminus\{0\}\Rightarrow x'=1-x=\frac{2026-a}{2026}\in H$ și $0'=0$,

deci $\forall x,y\in H\Rightarrow x*y\in H$ și $x'\in H$, de unde rezultă că $H\le G$ ......................................................... **3p**

c) $x^2*x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\{x^2+x\}=\frac{1}{2}$ și cum $x\in[0,1)\Rightarrow x^2+x\in[0,2)\Rightarrow[x^2+x]\in\{0,1\}$.

I. Dacă $[x^2+x]=0\Rightarrow\{x^2+x\}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2+x=\frac{1}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{3}}{2},x\in[0,1)\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

II. Dacă $[x^2+x]=1\Rightarrow\{x^2+x\}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2+x-1=\frac{1}{2}\Rightarrow x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{7}}{2},x\in[0,1)\Rightarrow x=\frac{-1+\sqrt{7}}{2}$

Mulțimea soluțiilor ecuației $x^2*x=\frac{1}{2}$, cu $x\in G$, este $S=\left\{\frac{-1+\sqrt{3}}{2},\frac{-1+\sqrt{7}}{2}\right\}$ . . . . . . . . . . . . . . ...........**6p**

**Problema 2.** **(22,5 puncte)**

Fie $(G,\cdot)$ un grup cu proprietatea că există $a\in G$ astfel încât $a^2x^5a^2=x,\ (\forall)x\in G$. Arătați că $x^8=e,\ (\forall)x\in G$, unde $e\in G$ este elementul neutru al grupului $(G,\cdot)$.

*Soluție.*

Pentru $x=e$, obținem $a^4=e$..........................................................................................................................**3,5p**

Atunci $a^2\cdot\left|a^2x^5a^2=x\right|\cdot a^2\Leftrightarrow x^5=a^2xa^2,\forall x\in G\quad(1)$ ...........................................................................**6p**

Înlocuind în $(1)$ pe $x$ cu $x\cdot y, x,y\in G$, avem $(xy)^5=a^2(xy)a^2 \Leftrightarrow (xy)^5=a^2xa^4ya^2$

$\Leftrightarrow (xy)^5=(a^2xa^2)(a^2ya^2) \Leftrightarrow x^{-1}\left|x(yx)^4y=x^5\cdot y^5\right|y^{-1} \Leftrightarrow (yx)^4=x^4y^4$ ..............................................**10p**

Pentru $y=a^2$, avem $(a^2x)^4=x^4a^8 \Leftrightarrow (a^2x)(a^2x)(a^2x)(a^2x)=x^4 \Leftrightarrow (a^2xa^2)x(a^2xa^2)x=x^4$

$\Leftrightarrow x^5\cdot x\cdot x^5\cdot x=x^4 \Leftrightarrow x^{12}=x^4 \Leftrightarrow x^8=e$ ..............................................**3p**

**Problema 3.** **(22,5 puncte)**

Arătați că dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a unei funcții $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ astfel încât $F(0)=0$, atunci există $c\in\mathbb{R}$ astfel încât $F(c)=(1-c)f(c)$.

*Supliment Gazeta Matematică 9/2025*

*Soluție.* Dacă $F$ este o primitivă a funcției $f$, atunci $F$ este derivabilă și $F'(x)=f(x), \forall x\in\mathbb{R}$ ........**4,5p**

Considerăm funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=(x-1)F(x)$, care este o funcție derivabilă pe $\mathbb{R}$ ....................**6p**

Deoarece $g$ este continuă și derivabilă pe $[0,1]$ și $g(0)=g(1)=0$, atunci din teorema lui Rolle există $c\in[0,1]$ cu $g'(c)=0 \Leftrightarrow F(c)+(c-1)f(c)=0 \Leftrightarrow F(c)=(1-c)f(c)$ .................................... **12p**

**Problema 4.** **(22,5 puncte)**

a) Determinați derivata funcției $f:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{\operatorname{tg}x}{e^x}$.

b) Calculați primitivele funcției $g:\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}, g(x)=\frac{e^x(2-\sin 2x)}{e^{2x}\cos^2x+\sin^2x}$.

*Revista Argument/2018*

*Soluție.* a) $f'(x)=\frac{1-\sin x\cos x}{e^x\cos^2x}, \forall x\in\mathbb{R}$ ..............................................**9,5p**

b) $$\int g(x)dx=2\int\frac{e^x(1-\sin x\cos x)}{e^{2x}\cos^2x\left(1+\left(\frac{\operatorname{tg}x}{e^x}\right)^2\right)}dx=2\int\frac{1-\sin x\cos x}{e^x\cos^2x\left(1+\left(\frac{\operatorname{tg}x}{e^x}\right)^2\right)}dx=2\int\frac{\left(\frac{\operatorname{tg}x}{e^x}\right)'}{1+\left(\frac{\operatorname{tg}x}{e^x}\right)^2}dx$$

$=2\operatorname{arctg}\frac{\operatorname{tg}x}{e^x}+C$ ..............................................**13p**

**Se acordă 10 puncte din oficiu.**