Baia Mare, str. Progresului, nr. 45, cod poştal 430291
Telefon: 004.0262.224.289, Fax 004.0262.250.222
Email: colegiul_titulescu@yahoo.com,
Web: www.colegiultitulescu.ro
Blog: http://www.imaginecent.blogspot.com

Concursul Interjudețean de Matematică Aplicată în Economie „ECOMAT”
Ediția a XII-a, **18 aprilie 2026**, Baia Mare
SUBIECT clasa a XI-a

Subiectul I.

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^2 - I_3 = A + I_3$.
b) Arătați că matricea A este inversabilă și determinați inversa ei.
c) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$A^n = \frac{1}{3} \cdot [(2^n - (-1)^n)A + (2^n + 2(-1)^n)I_3].$$

prof. Monica Naste, Colegiul Economic ”Partenie Cosma” Oradea

Subiectul II.

Pentru orice număr real $m \in \mathbb{R}$, se consideră punctele $A(2m+1,3), B(2-m,5), C(3m+2,2m+4)$.
a) Demonstrați că punctele A, B, C **nu** sunt coliniare, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.
b) Arătați că $16a \geq 5$, unde a este aria triunghiului ABC.
c) Pentru $m = 0$, calculați $\sin(\sphericalangle BAC)$.

prof. Pop Adrian Ioan, Colegiul Național „Gheorghe Șincai”, Baia Mare

Subiectul III.

Fie a și b două numere reale nenule și funcția $f: D \to \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = \frac{x^3}{ax^2 + bx + 3}.$$

a) Determinați numerele reale a și b pentru care dreapta de ecuație $y = 2x + 1$ este asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.
b) Arătați că există două puncte în care tangenta la graficul funcției f este o dreaptă paralelă cu dreapta $y = 2x + 1$.

prof. Fănățan Nelu, Colegiul Economic „Nicolae Titulescu” Baia Mare

Subiectul IV.

Un consumator cu venitul de 300 u.m., consumă produsele x și y, unde prețul produsului x este de 20 u.m., iar prețul produsului y este de 10 u.m. Preferințele consumatorului sunt descrise de funcția de tip Cobb-Douglas $U(x,y) = \sqrt[5]{x \cdot y^4}$.
a) Calculați $U(3,96)$.
b) Dacă se consumă 20 de produse de tipul y, atunci maxim câte produse de tipul x se pot consuma?
c) Fie funcția $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = U(x, 30 - 2x)$ oricare ar fi $x > 0$.
Arătați că $f'(3) = 0$.

conf. univ. dr. Horvat-Marc Andrei, UTCN-CUNBM

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj de la $0\ la\ 7$

Baia Mare, str. Progresului, nr. 45, cod poştal 430291
Telefon: 004.0262.224.289, Fax 004.0262.250.222
Email: colegiul_titulescu@yahoo.com,
Web: www.colegiultitulescu.ro
Blog: http://www.imaginecent.blogspot.com

Concursul Interjudețean de Matematică Aplicată în Economie „ECOMAT”

Ediția a XII-a, **18 aprilie 2026**, Baia Mare

SUBIECT clasa a XI-a

Barem de corectare

Subiectul I.

Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ și $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Arătați că $A^2 - I_3 = A + I_3$.

b) Arătați că matricea A este inversabilă și determinați inversa ei.

c) Arătați că pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea

$$A^n = \frac{1}{3} \cdot [(2^n - (-1)^n)A + (2^n + 2(-1)^n)I_3].$$

prof. Monica Naste, Colegiul Economic ”Partenie Cosma” Oradea

Rezolvare

a) Prin calcul direct se obține $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3 + A$, deci $A^2 - I_3 = A + I_3$ **2 pct**

b) Cum $\det(A) = 2 \neq 0$, rezultă că A este o matrice inversabilă **1 pct**

Din $A^2 = 2I_3 + A$ se obține $A(A - I_3) = 2I_3$, deci

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot (A - I_3)$$

1 pct

c) Demonstrație prin inducție matematică **3 pct**

Subiectul II.

Pentru orice număr real $m \in \mathbb{R}$, se consideră punctele $A(2m + 1{,}3), B(2 - m, 5), C(3m + 2{,}2m + 4)$.

a) Demonstrați că punctele A, B, C **nu** sunt coliniare, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că $16a \geq 5$, unde a este aria triunghiului ABC.

c) Pentru $m = 0$, calculați $\sin(\sphericalangle BAC)$.

prof. Pop Adrian Ioan, Colegiul Național „Gheorghe Șincai”, Baia Mare

Rezolvare

a) Presupunem prin absurd că punctele A, B, C coliniare $\Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\Delta = 0$, unde

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2m + 1 & 3 & 1 \\ 2 - m & 5 & 1 \\ 3m + 2 & 2m + 4 & 1 \end{vmatrix} = -6m^2 - 3m - 1 = -6\left[\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{48}\right]$$

1 pct

Deci $\Delta < 0$ oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$, ceea ce contrazice ipoteza. În concluzie,
punctele A, B, C **nu** sunt coliniare, oricare ar fi $m \in \mathbb{R}$. **1 pct**

b) Pentru orice $m \in \mathbb{R}$ avem

$$a = \frac{1}{2} \cdot |\Delta| = 3\left[\left(m + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{5}{48}\right] \geq 3 \cdot \frac{5}{48} = \frac{5}{16}$$

2 pct

c) Pentru $m = 0$ se obține $A(1{,}3)$, $B(2{,}5)$, $C(2{,}4)$ și $a = \frac{1}{2}$. **1 pct**

Cum **1 pct**

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj de la $0\ la\ 7$

Baia Mare, str. Progresului, nr. 45, cod poştal 430291
Telefon: 004.0262.224.289, Fax 004.0262.250.222
Email: colegiul_titulescu@yahoo.com,
Web: www.colegiultitulescu.ro
Blog: http://www.imaginecent.blogspot.com

$$a = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin A}{2} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sin A}{2}$$

Rezultă

$$\sin A = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

1 pct

Subiectul III.

Fie a și b două numere reale nenule și funcția $f: D \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \frac{x^3}{ax^2+bx+3}$.

a) Determinați numerele reale a și b pentru care dreapta de ecuație $y = 2x + 1$ este asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f.

b) Pentru $a = \frac{1}{2}$ și $b = -\frac{1}{4}$, arătați că există două puncte în care tangenta la graficul funcției f este o dreaptă paralelă cu dreapta $y = 2x + 1$.

prof. Fănățan Nelu, Colegiul Economic „Nicolae Titulescu" Baia Mare

Rezolvare

a) Dacă dreapta de ecuație $y = 2x + 1$ este asimptota spre $+\infty$ la graficul funcției f, atunci

$$\lim_{x\to\infty}\big(f(x) - (2x+1)\big) = 0$$

1 pct

Se obține

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(1-2a)x^3 - (a+2b)x^2 - (b+6)x - 3}{ax^2 + bx + 3} = 0$$

1 pct

ceea ce implică

$$\begin{cases} 1 - 2a = 0 \\ a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

1 pct

b) Pentru $a = \frac{1}{2}$ și $b = -\frac{1}{4}$ se obține

$$f(x) = \frac{4x^3}{2x^2 - x + 12}$$

cu derivata

$$f'(x) = \frac{8x^2(x^2 - x + 18)}{(2x^2 - x + 12)^2}$$

1 pct

Condiția ca tangenta la graficul funcției f să fie o dreaptă paralelă cu dreapta $y = 2x + 1$ implică $f'(x) = 2$, ceea ce este echivalent cu

$$23x^2 + 24x - 144 = 0$$

1 pct

Din $\Delta = 24^2 - 4 \cdot 23 \cdot (-144) = 48^2 \cdot 6 > 0$, se obține că ecuația $f'(x) = 2$ admite două soluții reale distincte. Cum f este definită pe $D = \mathbb{R}$, rezultă că există exact două puncte în care tangenta la graficul funcției f este o dreaptă paralelă cu dreapta $y = 2x + 1$.

2 pct

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7

Baia Mare, str. Progresului, nr. 45, cod poştal 430291
Telefon: 004.0262.224.289, Fax 004.0262.250.222
Email: colegiul_titulescu@yahoo.com,
Web: www.colegiultitulescu.ro
Blog: http://www.imaginecent.blogspot.com

Subiectul IV.

Un consumator cu venitul de 300 u.m., consumă produsele x și y, unde prețul produsului x este de 20 u.m., iar prețul produsului y este de 10 u.m. Preferințele consumatorului sunt descrise de funcția de tip Cobb-Douglas $U(x,y) = \sqrt[5]{x \cdot y^4}$.

a) Calculați $U(3,96)$.

b) Dacă se consumă 20 de produse de tipul y, atunci maxim câte produse de tipul x se pot consuma?

c) Fie funcția $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, definită prin $f(x) = U(x, 30-2x)$ oricare ar fi $x > 0$.
Arătați că $f'(3) = 0$.

conf. univ. dr. Horvat-Marc Andrei, UTCN-CUNBM

Rezolvare

a) $U(3,96) = U(3,2^5 \cdot 3) = (3 \cdot 2^{5\cdot 4} \cdot 3^4)^{\frac{1}{5}} = 3 \cdot 2^4 = 48$ **2 pct**

b) Din $20x + 10y = 300$, pentru $y = 20$, se obține $x = 5$ **2 pct**

c) Prin înlocuire se obține $f(x) = 2^{\frac{4}{5}} \cdot x^{\frac{1}{5}} \cdot (15-x)^{\frac{4}{5}}$, deci **1 pct**

$$f'(x) = 2^{\frac{4}{5}} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot x^{-\frac{4}{5}} \cdot (15-x)^{\frac{4}{5}} - x^{\frac{1}{5}} \cdot \frac{4}{5} \cdot (15-x)^{-\frac{1}{5}}\right)$$

$$f'(x) = 2^{\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[\left(\frac{15-x}{x}\right)^{\frac{4}{5}} - 4 \cdot \left(\frac{x}{15-x}\right)^{\frac{1}{5}}\right]$$

1 pct

Atunci

$$f'(3) = 2^{\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(4^{\frac{4}{5}} - 4 \cdot 4^{-\frac{1}{5}}\right) = 2^{\frac{4}{5}} \cdot \frac{1}{5} \cdot \left(2^{\frac{8}{5}} - 2^{\frac{8}{5}}\right) = 0$$

1 pct

Timp de lucru 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare subiect este notat cu punctaj de la 0 la 7