



Concursul Interjudețean de Matematică Aplicată în Economie „ECOMAT”

Ediția a XII-a, 18 aprilie 2026, Baia Mare

SUBIECT clasa a XII-a

Subiectul I.

Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = 3xy - 6x - 6y + 14.$$

a) Arătați că $x * y = 3(x - 2)(y - 2) + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) Rezolvați ecuația $x * x * x = x$.

c) Determinați numerele naturale a, b, c știind că $a < b < c$ și $a * b * c = 92$.

prof. Borșa Mădălina, Școala Gimnazială Baia Sprie

Subiectul II.

Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, cu $f = (X^2 + X + 1)^{2026}$ și forma algebrică

$$f = a_{4052}X^{4052} + a_{4051}X^{4051} + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0.$$

a) Determinați suma tuturor coeficienților de rang par ai polinomului f .

b) Aflați a_1 .

c) Determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 + 3X + 2$.

prof. Mureșan Mihaiela-Corina, Colegiul Economic „Julian Pop” Cluj-Napoca

Subiectul III.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)(1 + x^3)}.$$

a) Calculați

$$\int_0^1 (t^3 + 1)f(t)dt.$$

b) Arătați că

$$\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt = \int_1^x t^3 f(t)dt, \forall x > 0.$$

c) Calculați

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt.$$

prof. Zlămpareț Horia, Colegiul Național “Vasile Lucaciu” Baia Mare

Subiectul IV.

Un consumator cu venitul de 60 u.m., consumă produsele x și y , unde prețul produsului x este de a u.m., iar prețul produsului y este de 1 u.m., unde a este un număr natural nenul. Preferințele consumatorului sunt descrise de funcția de tip Cobb-Douglas $U(x, y) = \sqrt[4]{x \cdot y^3}$.

a) Fie $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă. Arătați că există $k \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea

$$\int \left[\frac{1}{4} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{f(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot f'(x) \right] dx = k + x^{\frac{1}{4}} \cdot (f(x))^{\frac{3}{4}}, \quad x > 0.$$

b) Dacă există o funcție $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât $y = f(x)$ oricare ar fi $x > 0$, atunci considerăm $u(x) = U(x, f(x))$ oricare ar fi $x > 0$. Determinați $a \in \mathbb{N}^*$, prețul produsului x , știind că

$$u'(x) \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot (4 - x)^{\frac{1}{4}} = 15^{\frac{3}{4}}(1 - x), \quad x \in (0, 4).$$

conf. univ. dr. Horvat-Marc Andrei, UTCN-CUNBM



Concursul Interjudețean de Matematică Aplicată în Economie „ECOMAT”

Ediția a XII-a, 18 aprilie 2026, Baia Mare

SUBIECT clasa a XII-a

Brem de corectare

Subiectul I.

Pe \mathbb{R} se definește legea de compoziție asociativă

$$x * y = 3xy - 6x - 6y + 14.$$

a) Arătați că $x * y = 3(x - 2)(y - 2) + 2, \forall x, y \in \mathbb{R}$

b) Rezolvați ecuația $x * x * x = x$.

c) Determinați numerele naturale a, b, c știind că $a < b < c$ și $a * b * c = 92$.

prof. Borșa Mădălina, Școala Gimnazială Baia Sprie

Rezolvare

a) Calcul

$$x * y = 3(x - 2)(y - 2) + 2 = 3xy - 6x - 6y + 14 \quad \mathbf{2 \text{ pct}}$$

b) Ecuația $x * x * x = x$ revine la

$$9(x - 2)^3 = x - 2 \Leftrightarrow (x - 2)(9x^2 - 36x + 35). \quad \mathbf{1 \text{ pct}}$$

Se obțin soluțiile

$$x \in \left\{ 2, \frac{5}{3}, \frac{7}{3} \right\}. \quad \mathbf{2 \text{ pct}}$$

c) Ecuația $a * b * c = 92$ revine la

$$(a - 2)(b - 2)(c - 2) = 10 = 1 \cdot 2 \cdot 5 = (-2) \cdot (-1) \cdot 5 \quad \mathbf{1 \text{ pct}}$$

Cum $a < b < c$, avem $a - 2 < b - 2 < c - 2$, deci

$$(a, b, c) \in \{(3, 4, 7), (0, 1, 7)\}. \quad \mathbf{1 \text{ pct}}$$

Subiectul II.

Fie polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, cu $f = (X^2 + X + 1)^{2026}$ și forma algebrică

$$f = a_{4052}X^{4052} + a_{4051}X^{4051} + \dots + a_2X^2 + a_1X + a_0.$$

a) Determinați suma tuturor coeficienților de rang par ai polinomului f .

b) Aflați a_1 .

c) Determinați restul împărțirii polinomului f la polinomul $g = X^2 + 3X + 2$.

prof. Mureșan Mihaiela-Corina, Colegiul Economic „Julian Pop” Cluj-Napoca

Rezolvare

a) Suma tuturor coeficienților de rang par ai polinomului f este

$$S = a_0 + a_2 + \dots + a_{4052} = \frac{f(1) + f(-1)}{2} = \frac{3^{2026} + 1}{2}. \quad \mathbf{1 \text{ pct}}$$

b) Cum $a_1 = f'(0)$ și $f'(x) = 2026(2x + 1)(x^2 + x + 1)^{2025}$, rezultă

$$a_1 = 2026. \quad \mathbf{2 \text{ pct}}$$

c) Din teorema împărțirii cu rest rezultă că există și sunt unice polinoamele q și r astfel încât

$f = gq + r$, unde $\text{grad } r < \text{grad } g = 2 \Rightarrow r = aX + b$, deci

$$f = gq + aX + b \quad \mathbf{1 \text{ pct}}$$

Cum $g = X^2 + 3X + 2 = (X + 1)(X + 2)$, avem

$$f(-1) = -a + b = 1$$

$$f(-2) = -2a + b = 3^{2026} \quad \mathbf{1 \text{ pct}}$$

de unde rezultă $\begin{cases} -a + b = 1 \\ -2a + b = 3^{2026} \end{cases}$, cu $\begin{cases} a = 1 - 3^{2026} \\ b = 2 - 3^{2026} \end{cases}$

În concluzie, restul împărțirii polinomului f la polinomul g este

$$r = (1 - 3^{2026})X + 2 - 3^{2026}. \quad \mathbf{1 \text{ pct}}$$



Subiectul III.

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, cu

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)(1+x^3)}.$$

a) Calculați

$$\int_0^1 (t^3 + 1)f(t)dt.$$

b) Arătați că

$$\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt = \int_1^x t^3 f(t)dt, \forall x > 0.$$

c) Calculați

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt$$

prof. Zlămpareț Horia, Colegiul Național "Vasile Lucaciu" Baia Mare

Rezolvare

a)

$$\int_0^1 (t^3 + 1)f(t)dt = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{4}.$$

2 pct

b) Se arată că

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = x^5 \cdot f(x), \quad \forall x > 0.$$

1 pct

Cu schimbarea de variabilă $t = \frac{1}{y}$, se obține

$$\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt = \int_x^1 f\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \frac{-1}{y^2} dy = \int_1^x y^5 f(y) \cdot \frac{1}{y^2} dy = \int_1^x t^3 f(t)dt, \quad \forall x > 0.$$

1 pct

c) Au loc egalitățile

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_1^x t^3 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt \right)$$

1 pct

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{x}}^x f(t)dt = \lim_{x \rightarrow \infty} \int_1^x (1+t^3)f(t)dt = \frac{\pi}{4}.$$

2 pct



Subiectul IV.

Un consumator cu venitul de 60 u.m., consumă produsele x și y , unde prețul produsului x este de a u.m., iar prețul produsului y este de 1 u.m., unde a este un număr natural nenul. Preferințele consumatorului sunt descrise de funcția de tip Cobb-Douglas $U(x, y) = \sqrt[4]{x \cdot y^3}$.

a) Fie $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ o funcție continuă. Arătați că există $k \in \mathbb{R}$ pentru care are loc egalitatea

$$\int \left[\frac{1}{4} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{f(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot f'(x) \right] dx = k + x^{\frac{1}{4}} \cdot (f(x))^{\frac{3}{4}}, \quad x > 0.$$

b) Dacă există o funcție $f: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ astfel încât $y = f(x)$ oricare ar fi $x > 0$, atunci considerăm $u(x) = U(x, f(x))$ oricare ar fi $x > 0$. Determinați $a \in \mathbb{N}^*$, prețul produsului x , știind că

$$u'(x) \cdot x^{\frac{3}{4}} \cdot (4-x)^{\frac{1}{4}} = 15^{\frac{3}{4}}(1-x), \quad x \in (0,4).$$

conf. univ. dr. Horvat-Marc Andrei, UTCN-CUNBM

Rezolvare

a) Prin derivare, se obține

$$\left(k + x^{\frac{1}{4}} \cdot (f(x))^{\frac{3}{4}} \right)' = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} \cdot (f(x))^{\frac{3}{4}} + x^{\frac{1}{4}} \cdot \frac{3}{4} \cdot (f(x))^{\frac{3}{4}-1} \cdot f'(x)$$

2 pct

$$\left(k + x^{\frac{1}{4}} \cdot (f(x))^{\frac{3}{4}} \right)' = \frac{1}{4} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{f(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot f'(x)$$

1 pct

ceea ce implică

$$\int \left[\frac{1}{4} \left(\frac{f(x)}{x} \right)^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{f(x)} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot f'(x) \right] dx = k + x^{\frac{1}{4}} \cdot (f(x))^{\frac{3}{4}},$$

oricare ar fi $x > 0$ și pentru orice constantă reală $k \in \mathbb{R}$.

1 pct

b) Din constrângerea bugetară $ax + y = 60$ se obține $y = 60 - ax$

1 pct

Avem

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{15^{\frac{3}{4}}(1-x)}{x^{\frac{3}{4}} \cdot (4-x)^{\frac{1}{4}}} = \frac{15^{\frac{3}{4}}(4-x)^{\frac{3}{4}}}{4 \cdot x^{\frac{3}{4}}} - \frac{15^{\frac{3}{4}} \cdot 3 \cdot x^{\frac{1}{4}}}{4 \cdot (4-x)^{\frac{1}{4}}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{15(4-x)}{x} \right)^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{15(4-x)} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot 15 \end{aligned}$$

1 pct

Atunci, folosind a) se obține

$$u \in \int u'(x) dx = \int \left[\frac{1}{4} \left(\frac{15(4-x)}{x} \right)^{\frac{3}{4}} + \frac{3}{4} \left(\frac{x}{15(4-x)} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot 15 \right] dx = k + x^{\frac{1}{4}} \cdot (60 - 15x)^{\frac{3}{4}}$$

Cum pentru orice $x > 0$ trebuie să avem

$$u(x) = x^{\frac{1}{4}}(60 - ax)^{\frac{3}{4}} = k + x^{\frac{1}{4}} \cdot (60 - 15x)^{\frac{3}{4}}$$

rezultă $a = 15$.

1 pct