

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025

CLASA a X-a

Subiectul 1. Fie $a \in \mathbb{R}$ și $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că dacă $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ verifică relația $z^n + nz + a = 0$, atunci $|z| \geq 1$.

Subiectul 2.

a) Fie a, b, c numere reale din $(0, \infty)$. Arătați că

$$\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} - 1 \leq \frac{a+b+c}{3}.$$

b) Determinați cel mai mic număr real m astfel încât

$$\sqrt[3]{(1+a)(1+b)(1+c)} - 1 + m(|a-b| + |b-c| + |c-a|) \geq \frac{a+b+c}{3}, \forall a, b, c > 0.$$

Subiectul 3. Fie $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f(f(x) + y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\}$.

- a) Determinați toate funcțiile injective din F .
- b) Determinați toate funcțiile surjective din F .
- c) Arătați că F conține funcții neconstante care nu sunt nici injective și nici surjective.

Subiectul 4. Fie $n \geq 3$. Determinați cel mai mic număr natural k cu proprietatea că pentru orice funcție bijectivă $f : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$, există $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ astfel încât $|f(i) - i| \leq k$.

Gazeta Matematică

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!