

Concursul regional „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

ediția a XVIII-a, Baia Mare, 22 noiembrie 2025

CLASA a XII-a

Subiectul 1. Determinați funcția derivabilă $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, cu $f(1) = 0$, astfel încât

$$f'(\ln x) \cdot (\ln x)^2 = (2 - \ln x)^2, \text{ pentru orice } x \in (1, \infty).$$

Subiectul 2. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție primitivabilă, cu proprietatea că orice primitivă a sa admite asimptote spre $+\infty$ și spre $-\infty$. Demonstrați că orice dreaptă oblică intersectează graficul funcției f în cel puțin un punct.

Subiectul 3. Fie $M = (0, \infty)$ și legea de compoziție $*$: $M \times M \rightarrow M$, cu proprietățile:

P1: Dacă $a, b, c, x \in M$, atunci $a * (b * c) = x$ dacă și numai dacă $a * b = x * c$.

P2: $(a * b) * c = a * (b * c)$, pentru orice $a, b, c \in M$.

P3: $(a * b) * c = a * (c * b)$, pentru orice $a, b, c \in M$.

a) Demonstrați că legea de compoziție „ $*$ ” **nu** are element neutru, **nu** este comutativă și **nu** este asociativă.

b) Dați un exemplu de astfel de lege de compoziție.

Subiectul 4. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ și un semigrup $(S, \cdot)$ cu proprietatea că există $a \in S$, astfel încât $ax^n a = x$, pentru orice $x \in S$. Demonstrați că:

a) $(S, \cdot)$ este monoid

b) $x^{2n-1} = x$, pentru orice $x \in S$.

Gazeta Matematică

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 0 la 7.

SUCCES!