Concursul Interjudețean de Matematică „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

Ediția a XIX-a, Baia Mare, 14 noiembrie 2026

CLASA a XI-a

Subiectul 1. Determinați $x, y, z \in \mathbb{R}$, știind că $\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2x & 2y & 2z \\ 3x & 3y & 3z \end{pmatrix}^{2026} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \end{pmatrix}$.

Subiectul 2. a) Se consideră șirurile de numere reale $(a_n)_{n\geq 1}$ și $(b_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 1$, astfel încât $a_n \neq 0$, $\frac{(2n+1)^2}{a_n} - \frac{(2n-1)^2}{a_{n+1}} = 8n^2 - 2$ și $b_n = \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_4} - \frac{a_4}{a_5} + \ldots + \frac{a_{2n-1}}{a_{2n}} - \frac{a_{2n}}{a_{2n+1}}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

Demonstrați că șirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

b) Dați un exemplu de șir mărginit $(x_n)_{n\geq 1}$ care nu este convergent, dar pentru care $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0$.

Subiectul 3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, cu $A = {}^tA$ și $B = {}^tB$. Demonstrați că dacă $\operatorname{tr}(A^2B^2) = \operatorname{tr}((AB)^2)$, atunci $AB = BA$ (am notat cu ${}^tX$ transpusa, iar cu $\operatorname{tr}(X)$ urma matricei $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$).

Subiectul 4. Fie șirurile $(a_n)_{n\geq 0}$ și $(b_n)_{n\geq 0}$ cu $a_n, b_n \in (0, \infty)$ și $b_n = a_{n+1} - \frac{1}{2 + a_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

Dacă $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, atunci:

a) demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ nu poate fi crescător;

b) dați un exemplu de șir $(b_n)_{n\geq 0}$ pentru care șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ nu este monoton;

c) demonstrați că șirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Timp de lucru: 3 ore.

Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10.

SUCCES!