Concursul Interjudețean de Matematică „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

Ediția a XIX-a, Baia Mare, 14 noiembrie 2026

CLASA a XII-a

Subiectul 1. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care admit primitivele $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, respectiv $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dacă pentru orice $x\in\mathbb{R}$, au loc egalitățile $f(x)=G(x)-F(0)$ și $g(x)=F(x)-G(0)$, calculați

$$\frac{1}{f(0)\cdot g(0)}\cdot\int f(x)\cdot g(x)dx.$$

Subiectul 2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ considerăm $I_n=\int\frac{1}{x+nx^{n+1}}dx$, $x>0$ și funcția $F_n\in I_n$, astfel încât $\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)=0$.

a) Arătați că pentru orice $x>0$ șirul $\left(F_n(x)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

b) Calculați $\int\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)dx$.

Subiectul 3. Pe mulțimea $H=(0,1)$ definim legea de compoziție $x\circ y=\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$, $\forall x,y\in H$

și fie funcția $f:H\to(0,+\infty)$, $f(x)=\frac{x}{1-x}$.

a) Verificați dacă $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in H$.

b) Arătați că legea „$\circ$” este asociativă.

c) Rezolvați în H ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{m\text{ ori}}=\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n\text{ ori}}$, unde m și n sunt numere naturale nenule distincte.

Subiectul 4.

Fie $a,b\in\mathbb{Z}_{2026}$ oarecare, iar $\left(x_n\right)_{n\geq0}$ șirul definit prin $x_0=a$, $x_1=b$ și $x_n=14\cdot x_{n-1}+11\cdot x_{n-2}$ pentru orice $n\geq2$.

a) Arătați că în $\mathbb{Z}_{2026}$, elementul 11 este inversabil și calculați inversul lui.

b) Arătați că că șirul $\left(x_n\right)_{n\geq0}$ este periodic.

Timp de lucru: 3 ore.
Fiecare subiect se notează cu puncte de la 1 la 10.

SUCCES!

Proiect realizat cu sprijinul financiar al Consiliului Județean Maramureș