Concursul Interjudețean de Matematică „PRIN LABIRINTUL MATEMATICII”

Ediția a XIX-a, Baia Mare, 14 noiembrie 2026

BAREM DE CORECTARE, CLASA A XII-A

Subiectul 1. Fie funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care admit primitivele $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, respectiv $G:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dacă pentru orice $x\in\mathbb{R}$, au loc egalitățile $f(x)=G(x)-F(0)$ și $g(x)=F(x)-G(0)$, calculați $\frac{1}{f(0)\cdot g(0)}\cdot\int f(x)\cdot g(x)dx$.

Soluție: Oficiu 1p

Funcțiile f și g sunt evident derivabile.

$f(x)+g(x)=F(x)+G(x)-F(0)-G(0)$. Derivând această egalitate obținem $\big(f(x)+g(x)\big)'=f(x)+g(x)$. Atunci există $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(x)+g(x)=a\cdot e^x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Deoarece $f(0)+g(0)=0$, rezultă $a=0$ și de aici $f(x)+g(x)=0$, $\forall x\in\mathbb{R}$. 4p

Analog $\big(f(x)-g(x)\big)'=g(x)-f(x)$. Există $b\in\mathbb{R}$, astfel încât $f(x)-g(x)=b\cdot e^{-x}$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Rezultă imediat $f(x)=\frac{b}{2}\cdot e^{-x}$, $g(x)=-\frac{b}{2}e^{-x}$ și în plus, $b\neq 0$. 3p

$\frac{1}{f(0)\cdot g(0)}\cdot\int f(x)\cdot g(x)dx=\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$. 2p

Subiectul 2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$ considerăm $I_n=\int\frac{1}{x+nx^{n+1}}dx$, $x>0$ și funcția $F_n\in I_n$, astfel încât $\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)=0$.

a) Arătați că pentru orice $x>0$ șirul $\big(F_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ este convergent.

b) Calculați $\int\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)dx$.

Soluție: Oficiu 1p

a) Fie $n\in\mathbb{N}^*$. $I_n=\int\frac{1}{x+nx^{n+1}}dx=\int\frac{1}{x^{n+1}\left(\frac{1}{x^n}+n\right)}dx=-\frac{1}{n}\int\frac{-\frac{n}{x^{n+1}}}{\frac{1}{x^n}+n}dx=-\frac{1}{n}\int\frac{\left(\frac{1}{x^n}+n\right)'}{\frac{1}{x^n}+n}dx=$

$-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{x^n}+n\right)+C$. Există $c_n\in\mathbb{R}$ astfel încât $F_n(x)=-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{x^n}+n\right)+c_n$, $\forall x>0$. 2p

$0=\lim\limits_{x\to+\infty}F_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{x^n}+n\right)+c_n\right)=-\frac{1}{n}\ln n+c_n$. Rezultă $c_n=\frac{1}{n}\ln n$ și de aici

$F_n(x)=-\frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{x^n}+n\right)+\frac{1}{n}\ln n=\frac{1}{n}\ln\frac{n}{\frac{1}{x^n}+n}=\ln\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+n}}$ 1p

Dacă $x\in(0,1)$, atunci $F_n(x)=\ln\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+n}}=\ln\frac{x\cdot\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{1+nx^n}}=\ln\frac{x\cdot\sqrt[n]{n}}{\left(1+nx^n\right)^{\frac{1}{n}}}\to\ln\frac{x\cdot 1}{(1+0)^0}=\ln x\in\mathbb{R}$. 2p

Dacă $x\in[1,+\infty)$, atunci $1\le\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+n}\le\sqrt[n]{n+1}\to 1$. Conform teoremei cleștelui $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+n}=1$ și de aici

$F_n(x)=\ln\frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{\frac{1}{x^n}+n}}\to\ln\frac{1}{1}=0\in\mathbb{R}$. 2p

b) Fie $F:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=\begin{cases}\ln x, & \text{dacă } x\in(0,1)\\ 0, & \text{dacă } x\in[1,+\infty)\end{cases}$. Evident F este continuă și deci admite primitive.

$\int\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)dx=\int F(x)dx=\begin{cases}x\ln x-x+1, & \text{dacă } x\in(0,1)\\ 0, & \text{dacă } x\in[1,+\infty)\end{cases}+C$. 2p

Subiectul 3. Pe mulțimea $H=(0,1)$ definim legea de compoziție $x\circ y=\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$, $\forall x,y\in H$ și fie funcția $f:H\to(0,+\infty)$, $f(x)=\frac{x}{1-x}$.

a) Verificați dacă $f(x\circ y)=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in H$.

b) Arătați că legea „$\circ$” este asociativă.

c) Rezolvați în H ecuația $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{m\text{ ori}}=\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n\text{ ori}}$, unde m și n sunt numere naturale nenule distincte.

(*SGM 9/2026* – enunț modificat)

Soluție: Oficiu 1p

a) $f(x\circ y)=\frac{x\circ y}{1-x\circ y}=\frac{\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}}{1-\frac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}}=\frac{xy}{(1-x)(1-y)}=f(x)\cdot f(y)$, $\forall x,y\in H$. Funcția f verifică egalitatea.

..... 2p

b) Pentru orice $x,y,z\in H$, are loc

$f\left((x\circ y)\circ z\right)=f(x\circ y)\cdot f(z)=f(x)\cdot f(y)\cdot f(z)=f(x)\cdot f(y\circ z)=f\left(x\circ(y\circ z)\right)$. Funcția f fiind injectivă, rezultă $(x\circ y)\circ z=x\circ(y\circ z)$. Legea este asociativă. 3p

c) $\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{m\text{ ori}}=\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n\text{ ori}}\Leftrightarrow f\left(\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{m\text{ ori}}\right)=f\left(\underbrace{x\circ x\circ\ldots\circ x}_{n\text{ ori}}\right)\Leftrightarrow\left(f(x)\right)^m=\left(f(x)\right)^n$.

Deoarece $f(x)>0$ și $m\ne n$, este necesar și suficient ca $f(x)=1$ și de aici imediat $x=\frac{1}{2}$. 4p

Subiectul 4. Fie $a,b\in\mathbb{Z}_{2026}$ oarecare, iar $(x_n)_{n\geq 0}$ șirul definit prin $x_0=a$, $x_1=b$ și $x_n=14\cdot x_{n-1}+11\cdot x_{n-2}$ pentru orice $n\geq 2$.

a) Arătați că în $\mathbb{Z}_{2026}$, elementul 11 este inversabil și calculați inversul lui.

b) Arătați că că șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este periodic.

(***)

Soluție: Oficiu 1p

a) Deoarece $2026=11\cdot 184+2$, avem că $5\cdot 2026=11\cdot 920+10=11\cdot 921-1$ și deci $11\cdot 921=5\cdot 2026+1$. Rezultă că în $\mathbb{Z}_{2026}$, $11\cdot 921=\hat{1}$.

11 este inversabil și inversul este 921. ..... 2p

Observație Faptul că 11 este inversabil se poate deduce și din faptul că 11 este prim cu 2026.

b) Deoarece $M=\{(x_n,x_{n+1})\mid n\in\mathbb{N}\}$ este o submulțime a mulțimii finite $\mathbb{Z}_{2026}\times\mathbb{Z}_{2026}$, există $k,l\in\mathbb{N}$, cu $k<l$, astfel încât $(x_k,x_{k+1})=(x_l,x_{l+1})$. 2p

Fie $k_0\in\mathbb{N}$ cel mai mic număr $k\in\mathbb{N}$ pentru care există $l>k$ cu $(x_k,x_{k+1})=(x_l,x_{l+1})$ și fie $l_0\in\mathbb{N}^*$ cel mai mic $l\in\mathbb{N}$ cu $l>k_0$ și $(x_{k_0},x_{k_0+1})=(x_l,x_{l+1})$.

Relația de recurență $x_n=14\cdot x_{n-1}+11\cdot x_{n-2}$ este echivalentă cu $921\cdot x_n=921\cdot 14\cdot x_{n-1}+x_{n-2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_{n-2}=921\cdot x_n-921\cdot(11+\hat{3})\cdot x_{n-1}\Leftrightarrow x_{n-2}=921\cdot x_n-(\hat{1}+921\cdot 3)\cdot x_{n-1}\Leftrightarrow x_{n-2}=921\cdot x_n-(\hat{1}+2763)\cdot x_{n-1}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_{n-2}=921\cdot x_n-738\cdot x_{n-1}$.

Dacă $k_0\geq 1$, atunci din $(x_{k_0},x_{k_0+1})=(x_{l_0},x_{l_0+1})$ obținem că

$x_{k_0-1}=921\cdot x_{k_0+1}-738\cdot x_{k_0}=921\cdot x_{l_0+1}-738\cdot x_{l_0}=x_{l_0-1}$, astfel că $(x_{k_0-1},x_{k_0})=(x_{l_0-1},x_{l_0})$, contrazicând minimalitatea lui k_0. Prin urmare $k_0=0$. 2p

Notăm atunci $d=l_0$ și arătăm că $x_n=x_{n+d}$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.

Notăm $P(n)$ afirmația $x_n=x_{n+d}$ și demonstrăm $P(n)$ prin inducție după $n\in\mathbb{N}$.

(V) Deoarece $(x_0,x_1)=(x_{k_0},x_{k_0+1})=(x_{l_0},x_{l_0+1})=(x_d,x_{d+1})$, rezultă că afirmațiile $P(0)$ și $P(1)$ sunt adevărate.

(I) Fie $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pentru care afirmațiile $P(n-2)$ și $P(n-1)$ sunt adevărate. Arătăm că $P(n)$ este de asemenea adevărată.

Deoarece $x_{n-2}=x_{n-2+d}$ și $x_{n-1}=x_{n-1+d}$, avem $x_n=14\cdot x_{n-1}+11\cdot x_{n-2}=14\cdot x_{n-1+d}+11\cdot x_{n-2+d}=x_{n+d}$, astfel că $P(n)$ este adevărată.

Prin urmare, conform (V) și (I), $P(n)$ este adevărată pentru orice $n\in\mathbb{N}$. Șirul $(x_n)_{n\geq 0}$ este deci periodic de perioadă d. 3p